

**Ein ug- und uu-Kern-Modell mit
schwingendem Rumpf, angewendet auf
die Kerne $_{10}\text{Ne}^{21}$, $_{11}\text{Na}^{21}$ und $_{11}\text{Na}^{22}$**

von
Werner Büttner

**aus
Fürth/Bay.**

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

**Ein ug- und uu-Kern-Modell mit
schwingendem Rumpf, angewendet auf
die Kerne $_{10}\text{Ne}^{21}$, $_{11}\text{Na}^{21}$ und $_{11}\text{Na}^{22}$**

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Werner Büttner

aus

Fürth/Bay.

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 28.11.1973
Dekan: Prof.Dr.J.Christiansen
Erstberichterstatter: Prof.Dr.H.Volz
Zweitberichterstatter: Prof.Dr.M.G.Huber

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	<u>Seite</u>
I. Die grobe Beschreibung eines uu-Kern-Modells	2
II. Übergang zum reduzierten System und Koordinatenwahl	8
III. Das Potential	11
IV. Der Hamiltonoperator in speziellen Koordinaten	17
V. Ein Ansatz zur Lösung der Schrödingergleichung	30
VI. Die Wirkung der Drehimpulsoperatoren auf ihre körpergeordneten Eigenfunktionen	44
VII. Symmetrisierte Nilssonfunktionen	51
VIII. Das Rumpfspektrum	67
IX. Die Ankopplung der Nilssonpotentiale an die schwingende Hantel	78
X. Der Einfluß der Rumpfschwingung auf das Spektrum von gu- und ug-Kernen, diskutiert anhand der Matrixelemente des Hamiltonoperators	88
XI. Die Anwendung des Modells auf den Kern $_{10}\text{Ne}^{21}$	100
XII. Die Anwendung des Modells auf den Kern $_{11}\text{Na}^{21}$	130
XIII. Die Anwendung des Modells auf den Kern $_{11}\text{Na}^{22}$	138
Zusammenfassung	149
Literaturhinweise	151

I. Die grobe Beschreibung eines uu-Kern-Modells

Wir wollen ein uu-Kern-Modell konstruieren, welches Kollektivanregungen in Form von Rotationen und Vibrationen sowie Einteilchenanregungen beschreiben kann. Vorstufen solch eines Modells finden sich bereits in der Literatur. So schufen F ä s s l e r und G r e i n e r ein Modell für deformierte gg-Kerne, welche schwingen und rotieren können [1]. F ä s s l e r erweiterte das Modell zur Anwendung auf gu- und ug-Kerne, indem er noch ein ungepaartes Nukleon hinzufügte, welches sich im rotierenden und schwingenden Potential des gg-Rumpfes bewegt [2]. D a v i d s o n schließlich lieferte ein uu-Kern-Modell mit starr deformiertem gg-Rumpf und zwei wechselwirkenden Außennukleonen, wobei er allerdings einen mit H_c bezeichneten Kopplungsterm im Hamiltonoperator vernachlässigte [3].

Wir zerlegen wie Davidson den uu-Kern in einen gg-Rumpf, ein ungepaartes Proton und ein ungepaartes Neutron. Darüberhinaus lassen wir auch noch den gg-Rumpf um eine deformierte Gleichgewichtslage schwingen. Außerdem soll H_c voll berücksichtigt werden. Unser besonderes Interesse soll der Frage gelten, wie die neu hinzugekommene Rumpfschwingung das Energiespektrum des uu-Kerns beeinflusst.

Nun zu den Einzelheiten des Modells. Was den

gg-Rumpf betrifft, so betrachten wir speziell den Fall, daß er axialsymmetrisch deformiert ist, also nur sog. "B-Schwingungen" ausführen kann. Außerdem möge er eine Symmetrieebene E durch seinen Schwerpunkt besitzen, auf der seine Symmetrieachse G senkrecht steht (vgl. Abb. 1). Einen Rumpf dieser Symmetrie können wir modellmäßig durch eine Hantel beschreiben, die aus zwei Massenpunkten gleicher Masse $2M$ im Abstand g_R besteht (vgl. Abb. 1).

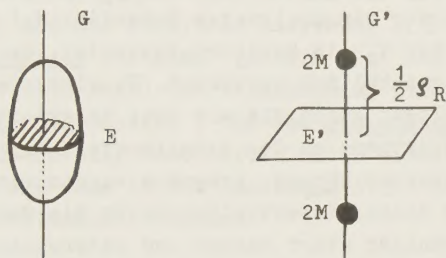


Abbildung 1: Zuordnung von gg-Rumpf und Hantel

Es entsprechen sich dann:

- (a) die Symmetrieachsen G und G' sowie die Symmetrieebenen E und E'
- (b) die gg-Rumpfmasse und die Hantelmasse $4M$
- (c) das Trägheitsmoment des gg-Rumpfes bzgl. einer auf G senkrechten Achse durch seinen Schwerpunkt und das analoge Trägheitsmoment Θ_{eff} der Hantel mit

$$\frac{1}{\theta_{\text{eff}}} = \left\langle \frac{1}{M g_R^2} \right\rangle$$

Da die Hantel bzgl. G' das Trägheitsmoment Null besitzt, kann sie um G' nicht rotieren. Sie kann deshalb auch keinen um seine Symmetrieachse G rotierenden Rumpf beschreiben. Außerdem kann sie - wie bereits erwähnt - keine δ -Deformation wiedergeben.

Damit die beiden Hantelmassen zusammenbleiben und um einen Gleichgewichtsabstand $g_R = \bar{g} \neq 0$ schwingen, führen wir ein geeignetes Potential $V_R(g_R)$ ein. Wir wählen für V_R ein Hardcore-Potential, das sich nach außen parabolisch fortsetzt. Es wird zwei Parameter enthalten, durch die wir zwei Energieabstände des Hantelspektrums an das experimentelle gg -Rumpfspektrum anpassen können. Außerdem werden wir durch Veränderung dieser Potentialparameter die Hantel mehr oder weniger starr machen und untersuchen, wie sich dies auf das Spektrum eines ug -Kerns auswirkt, dessen gg -Rumpf durch die Hantel beschrieben wird.

Die beiden ungepaarten Nukleonen des uu -Kerns repräsentieren wir in unserem Modell durch zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit der gleichen Masse m (den Unterschied von Protonen- und Neutronenmasse vernachlässigen wir). Bei starrer Hantel sollen sich die beiden Teilchen in Nilssonpotentialen V_P^{Nil} und V_N^{Nil} bewegen, welche die Hantelachse G' als Symmetrieachse besitzen. Im Fall der schwingenden Hantel sollen auch die Nilssonpotentiale gleichphasig mitschwingen. Dies erreichen wir durch eine Beziehung zwischen der Deformation β der

Nilssonpotentiale und der Hantellänge g_R , wobei gelten muß:

$$(1.1) \quad B(g_R=0) = 0; \quad \frac{dB}{dg_R} > 0.$$

Um einen physikalisch begründeten Ansatz für $B(g_R)$ zu erhalten, gehen wir folgendermaßen vor. Zunächst untersuchen wir, wie bei gg-Kernen verschiedener Massenzahlen (im niederenergetischen Bereich) die mittleren Werte der Deformation B und des Trägheitsmoments Θ zusammenhängen. Dann nehmen wir als Hypothese an, daß die erhaltene Beziehung $B(\Theta)$ auch bei einem einzelnen (weichen) gg-Kern (bei dem B und Θ variable Größen sind) den Zusammenhang zwischen der momentanen Deformation B und dem momentanen Trägheitsmoment Θ richtig beschreibt. Unter dieser Annahme können wir dann in die Beziehung $B(\Theta)$ das momentane Hantelträgheitsmoment

$$\Theta_{\text{Hantel}} = M g_R^2$$

einsetzen und erhalten dadurch die gesuchte Funktion $B(g_R)$.

Zusätzlich verlangen wir noch, daß der die Nilssonpotentiale erzeugende gg-Rumpf mit konstantem Volumen schwingt. Das führt bei den Nilssonpotentialen zu einer Beziehung zwischen der Nilssonschen Oszillatorfrequenz ω und der Deformation B , sodaß insgesamt ω und B Funktionen von der Hantellänge g_R werden.

Schließlich führen wir noch eine von der Rumpfschwingung unabhängige Restwechselwirkung V_{pN} zwischen Proton

und Neutron ein. Sie soll abstands- und spinabhängig sein.

Auf einen mathematischen Gesichtspunkt sei noch hingewiesen! Da die Nilssonpotentiale für Proton und Neutron fest mit dem rotierenden Rumpf verbunden sind, beschreiben wir die Lage der Außennukleonen von einem an den Rumpf gebundenen Koordinatensystem aus, wobei sich die Rumpfachse als eine Koordinatenachse anbietet. Wir verlangen eine eindeutige Definition dieses Koordinatensystems, sodaß noch eine weitere Achse festgelegt werden muß. Dies erreichen wir, indem wir ein Außennukleon zur Definition des Koordinatensystems heranziehen. Wie wir sehen werden, führt dies zu besonderen mathematischen Problemen bei der quantenmechanischen Beschreibung dieses Teilchens vom körpergebundenen Koordinatensystem aus.

Abschließend ist noch zu klären, auf welche uu-Kerne das Modell angewendet werden soll. Wir benötigen Kerne mit positiv deformiertem Rumpf. Sie sind hauptsächlich in den Massenbereichen

$$20 \leq A \leq 30 \quad \text{und} \quad 150 \leq A \leq 180$$

zu finden. Die gg-Kerne der unteren Massenregion sind i.a. weicher als die schweren gg-Kerne und deshalb für unser Modell besser geeignet. Den Grad der "Weichheit" können wir abschätzen, indem wir in der $(0^+, 2^+, 4^+)$ -Grundzustandsbande jeweils den Energiequotienten

$$(1.2) \quad \alpha = \frac{E(4^+) - E(0^+)}{E(2^+) - E(0^+)}$$

bilden und ihn mit $\alpha_{\text{Starr}} = \frac{10}{3}$ vergleichen. Bei einem weichen gg-Kern ist zu erwarten: $\alpha < \alpha_{\text{Starr}}$. In der folgenden Tabelle sind positiv deformierte gg-Kerne aus dem Massenbereich $20 \leq A \leq 30$ mit den zugehörigen Werten $\alpha/\alpha_{\text{Starr}}$ und mit den entsprechenden uu-Kernen aufgeführt.

T A B E L L E

gg-Kern	$\frac{\alpha}{\alpha_{\text{Starr}}}$	uu-Kern
$_{10}\text{Ne}^{20}$	0,782	$_{11}\text{Na}^{22}$
$_{10}\text{Ne}^{22}$	0,786	$_{11}\text{Na}^{24}$
$_{12}\text{Mg}^{24}$	0,903	$_{13}\text{Al}^{26}$
$_{12}\text{Mg}^{26}$	0,716	$_{13}\text{Al}^{28}$
$_{14}\text{Si}^{30}$	0,708	$_{15}\text{P}^{32}$

II. Übergang zum reduzierten System und Koordinatenwahl

Im vorangehenden Kapitel wurde ein uu-Kern-Modell beschrieben, welches aus 4 Massenpunkten besteht. Zwei davon hatten je die Masse $2M$ und keinen Spin. Die beiden anderen waren Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit der Masse m . Zwischen diesen 4 Teilchen sollten nur innere Kräfte wirken. Wir wählen deshalb für diese 4 Teilchen 12 Koordinaten so, daß 3 Koordinaten die Lage des Gesamtschwerpunkts S beschreiben. Da diese drei Schwerpunktskoordinaten im Potential nicht auftreten, können wir die Schwerpunktsbewegung abseparieren. Wir betrachten S im folgenden als ruhend und beschreiben die Bewegung des 4-Teilchen-Systems relativ zu S von einem raumfesten kartesischen XYZ-Achsenkreuz aus, dessen Ursprung S ist. Außerdem rechnen wir in der Näherung "Gesamtschwerpunkt = Rumpfschwerpunkt", was nur bei nicht zu leichten uu-Kernen erlaubt ist.

Zur Aufstellung der kinetischen Energie T führen wir wie in Abbildung 2 die Vektoren $\vec{\mathfrak{J}}_R$, $\vec{\mathfrak{J}}_P$ und $\vec{\mathfrak{J}}_N$ ein. Bezüglich des raumfesten XYZ-Systems ist dann die kinetische Energie der vier Teilchen durch den Ausdruck (2.1) gegeben:

$$(2.1) \quad T = \frac{M}{2} \dot{\vec{\mathfrak{J}}}_R^2 + \frac{m}{2} \dot{\vec{\mathfrak{J}}}_P^2 + \frac{m}{2} \dot{\vec{\mathfrak{J}}}_N^2.$$

In (2.1) erscheint die kinetische Energie des ursprünglichen 4-Teilchen-Systems formal als kinetische Energie

eines 3-Teilchen-Systems (sog. "reduziertes System"), welches aus den Massen M, m, m mit den Ortsvektoren $\vec{S}_R, \vec{S}_P, \vec{S}_N$ besteht (vgl. Abb. 2).

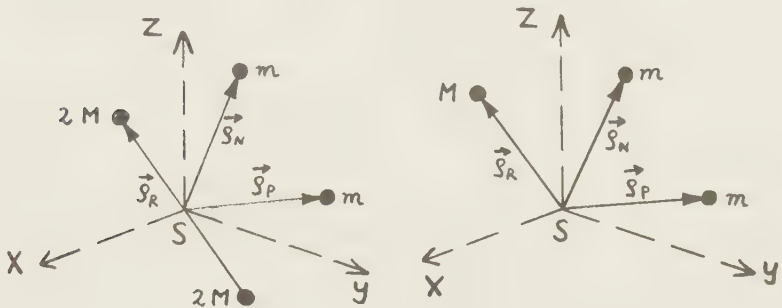


Abbildung 2:

Ursprüngliches und reduziertes System

Die drei Massen dieses reduzierten Systems wollen wir nun im raumfesten XYZ-System durch 9 Koordinaten festlegen. Sechs (sog. "innere") Koordinaten wählen wir so, daß sie eindeutig mit den 6 Teilchenabständen des ursprünglichen 4-Teilchen-Systems verknüpft sind. Das Potential wird dann allein eine Funktion dieser inneren Koordinaten. Zur Definition der "äußeren" Koordinaten führen wir zusätzlich ein körpergebundenes kartesisches $\xi\eta\zeta$ -Achsenkreuz mit Ursprung S ein. Die ζ -Achse habe die Richtung von $\vec{S}_R$, die ξ -Achse liege in der Ebene, die von den Vektoren $\vec{S}_R$ und $\vec{S}_P$ aufgespannt wird. Als äußere Koordinaten wählen wir die Eulerschen Winkel α, β, γ , welche die gegenseitige Lage von XYZ- und $\xi\eta\zeta$ -Bezugssystem festlegen. Als innere

Koordinaten verwenden wir die sphärischen Polar-
koordinaten der reduzierten Massen im $\{ \eta \}$ -Bezugs-
system, nämlich (vgl. Abb. 3)

für M: $(s_R, 0, 0)$

für das Proton: $(s_P, u, 0)$

für das Neutron: (s_N, v, δ)

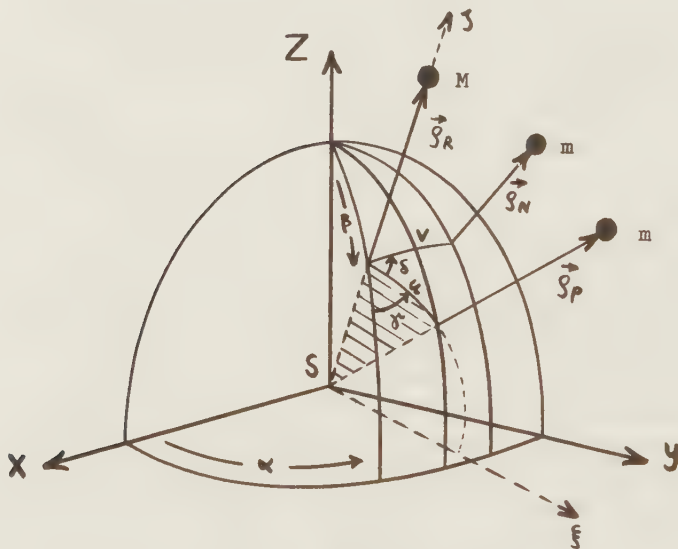


Abbildung 3: Koordinaten im reduzierten System

III. Das Potential

(A) Wir betrachten zunächst den Fall, daß unser Modell aus einer Hantel mit fester Länge $g_R = \bar{g}$ und zwei Spin $-\frac{1}{2}$ - Teilchen besteht. Das zugehörige Potential sei dann gegeben durch

$$(3.1) \quad V = v_P^{Nil}(\vec{g}_P, \vec{L}_P, \vec{S}_P) + v_N^{Nil}(\vec{g}_N, \vec{L}_N, \vec{S}_N) + \\ + v_{PN}(\vec{g}_P, \vec{g}_N, \vec{S}_P, \vec{S}_N).$$

Dabei seien v_P^{Nil} und v_N^{Nil} Nilssonpotentiale für Proton und Neutron, welche die Hantelachse und damit die g -Achse des körpergebundenen Koordinatensystems als Symmetrieachse besitzen:

$$(3.2) \quad v_P^{Nil} = \frac{m}{2} \bar{\omega}^2 g_P^2 - m \bar{\omega}^2 \bar{E} g_P^2 Y_{20}(u, 0) + \\ + D_P \vec{L}_P^2 + C_P \vec{L}_P \cdot \vec{S}_P ;$$

$$(3.3) \quad v_N^{Nil} = \frac{m}{2} \bar{\omega}^2 g_N^2 - m \bar{\omega}^2 \bar{E} g_N^2 Y_{20}(v, 0) + \\ + D_N \vec{L}_N^2 + C_N \vec{L}_N \cdot \vec{S}_N .$$

Die hier auftretenden Parameter $(\bar{\omega}, \bar{E}, D_P, C_P)$ und $(\bar{\omega}, \bar{E}, D_N, C_N)$ seien wie bei Nilsson definiert [4] . Die Deformation $\bar{E}$ wurde in beiden Potentialen gleich gewählt, da sie von der Deformation des gg-

Rumpfes bestimmt wird. Ebenso ist auch die Oszillatorfrequenz $\bar{\omega}$ beiden Nilssonpotentialen gemeinsam, da sie sich allein aus $\bar{E}$ und der Massenzahl A des uu-Kerns ausrechnen läßt (vgl.(3.9)). Die Parameter C_P und D_P können jedoch von C_N und D_N verschieden sein, da die einen von der Protonenzahl, die anderen von der Neutronenzahl des uu-Kerns abhängen. Die Skalarprodukte $\vec{L}_P \cdot \vec{S}_P$ und $\vec{L}_N \cdot \vec{S}_N$ sollen zunächst noch - wie bei Nilsson - aus den raumfesten Komponenten der Operatoren $\vec{L}_P, \vec{L}_N, \vec{S}_P$ und $\vec{S}_N$ gebildet werden. Im folgenden Kapitel werden wir dann stattdessen deren ξ -, η - und ζ -Komponenten einführen.

Nun zum Potential V_{PN} , welches die Orts- und Spinvektoren von Proton und Neutron enthält:

$$(3.4) \quad V_{PN} = \frac{V_0}{\lambda^3} \delta(\vec{r}_P - \vec{r}_N) (1 - \bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{2} \vec{S}_P \cdot \vec{S}_N)$$

$$\text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{m \bar{\omega}}{\hbar}}.$$

Mit diesem Potential konnte De Shalit [5] im Falle sphärischer Einteilchenpotentiale V_P und V_N die für uu-Kerne wichtigen Nordheim-Regeln erklären. V_0 und $\bar{\alpha}$ sind dabei passend zu wählende Konstante. Das Skalarprodukt $\vec{S}_P \cdot \vec{S}_N$ soll - wie oben - wieder aus den raumfesten Komponenten der Spinvektoren gebildet werden. Die Division durch λ^3 hat zur Folge, daß V_{PN} und V_0 die gleiche Benennung erhalten. Dabei hat λ die Dimension einer reziproken Länge und etwa für den Grundzustand eines linearen harmonischen Oszillators mit

der Masse m , der Frequenz $\bar{\omega}$ und der Koordinate x die Bedeutung:

$$(3.5) \quad \lambda^2 = \frac{1}{2x^2}.$$

(B) Wir gehen nun zu dem Fall über, daß die Hantel schwingt und schreiben hier das Potential des Gesamtsystems in der Form:

$$(3.6) \quad V = V_P(\vec{s}_P, \vec{g}_R, \vec{L}_P, \vec{S}_P) + V_N(\vec{s}_N, \vec{g}_R, \vec{L}_N, \vec{S}_N) + \\ + V_R(\vec{g}_R) + V_{PN}(\vec{s}_P, \vec{s}_N, \vec{S}_P, \vec{S}_N).$$

Im Vergleich zum Potential (3.1) ist hier noch ein Hantelpotential V_R hinzugekommen, welches Schwingungs- und Rotationszustände für die Hantel liefern soll. Außerdem hängen jetzt die Einteilchenpotentiale V_P und V_N von der variablen Hantellänge $\vec{g}_R$ ab, da man sich vorzustellen hat, daß ein schwingender gg -Rumpf auch schwingende Potentiale für die Außennukleonen erzeugt. Die Proton-Neutron-Wechselwirkung soll dagegen unabhängig von der Rumpfschwingung sein und wurde deshalb in (3.1) und (3.6) gleich gewählt.

Für $V_R(\vec{g}_R)$ nehmen wir das Potential:

$$(3.7) \quad V_R(\vec{g}_R) = \frac{A}{g_R^2} + B g_R^2; \quad (A > 0; B > 0).$$

Es ist in Abbildung 4 für den gg-Kern ${}_{10}\text{Ne}^{20}$ skizziert, d.h. die Parameter A und B wurden für diese Abbildung so bestimmt, daß im niederenergetischen Bereich das Hantelspektrum möglichst gut mit dem experimentellen ${}_{10}\text{Ne}^{20}$ -Spektrum übereinstimmt. Einzelheiten hierzu werden in Kapitel VIII gebracht.

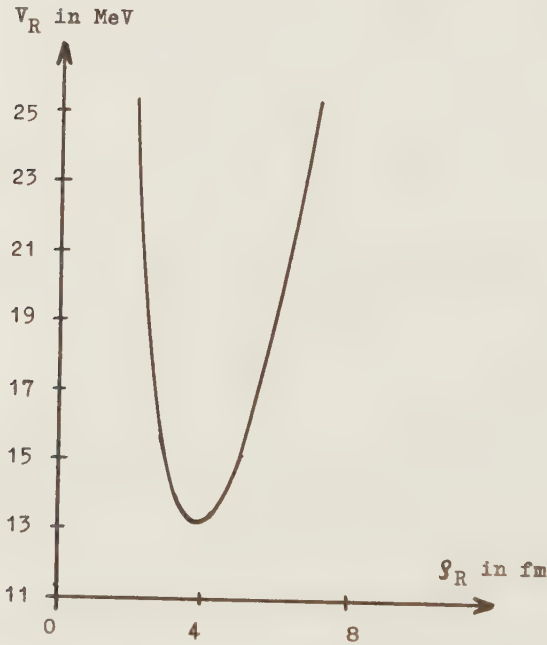


Abbildung 4: Das Potential $V_R(g_R)$ zu ${}_{10}\text{Ne}^{20}$

Die in (3.6) auftretenden g_R -abhängigen Einteilchenpotentiale V_P und V_N konstruieren wir so, daß sie für jeden Wert der Variablen g_R Nilssonpotentiale mit der g -Achse als Symmetrieachse und der Deformation $\beta(g_R)$ sind, wobei $\beta(g_R)$ jedenfalls der Beziehung (1.1) genügen soll. Dabei stellen wir uns wie Nilsson vor, daß die Nilssonpotentiale jeweils die gleiche Deformation β wie der sie erzeugende Rumpf besitzen und daß bei Änderungen von β das Volumen des Rumpfes konstant bleibt. Das führt nach Nilsson zu einer Beziehung zwischen ω und β . Mit

$$(3.8) \quad \delta = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta$$

muß dann gelten:

$$(3.9) \quad \pi \omega(\delta) = \frac{41}{2\sqrt{A}} \left(1 - \frac{4}{3} \delta^2 - \frac{16}{27} \delta^3 \right)^{-\frac{1}{6}}.$$

Der Übergang vom starren zum schwingenden Nilssonpotential erfolgt also allgemein durch die beiden Ersetzungen

$$(3.10) \quad \bar{\beta} \longrightarrow \beta(g_R); \quad \bar{\omega} \longrightarrow \omega(g_R),$$

welche durch (3.8) und (3.9) miteinander verknüpft sind. Wenden wir also (3.10) auf die in (3.2) und (3.3) angegebenen starren Nilssonpotentiale V_P^{Nil} und V_N^{Nil} an, so erhalten wir sofort die Ausdrücke

der schwingenden Nilssonpotentiale V_P und V_N . Die Differenzen $(V_P - V_P^{Nil})$ bzw. $(V_N - V_N^{Nil})$ geben uns dann die von der Schwingung herrührenden Zusatzterme an:

$$\begin{aligned} \underline{(3.11)} \quad V_P - V_P^{Nil} &= \frac{m}{2}(\omega^2 - \bar{\omega}^2) g_P^2 - \\ &- m(\omega^2_{\beta} - \bar{\omega}^2_{\bar{\beta}}) g_P^2 Y_{20}(u, 0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{(3.12)} \quad V_N - V_N^{Nil} &= \frac{m}{2}(\omega^2 - \bar{\omega}^2) g_N^2 - \\ &- m(\omega^2_{\beta} - \bar{\omega}^2_{\bar{\beta}}) g_N^2 Y_{20}(v, 0). \end{aligned}$$

IV. Der Hamiltonoperator in speziellen Koordinaten

Fassen wir kurz zusammen: In Kapitel 1 wurde ein uu-Kern-Modell vorgestellt, welches aus einer (starken oder schwingenden) Hantel und zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen bestand. Da nur innere Kräfte wirken sollten, konnten wir in Kapitel 2 die Bewegung des Schwerpunkts S abseparieren und als Bezugssystem ein raumfestes XYZ-Achsenkreuz mit Ursprung S wählen. In diesem Bezugssystem ließ sich die kinetische Energie T als kinetische Energie von 3 reduzierten Massen schreiben, für die wir dann spezielle Koordinaten einführten. In Kapitel 3 schließlich wählten wir das Potential V des 4-Teilchen-Systems und drückten es durch die Koordinaten der 3 reduzierten Massen aus. Dabei wurde zwischen den Fällen "starre Hantel" und "schwingende Hantel" unterschieden.

Unser nächstes Ziel ist es nun, für diese beiden Fälle auch den Operator der kinetischen Energie T aufzustellen. Für das System mit schwingender Hantel können wir T aus [6] übernehmen:

$$(4.1) \quad T = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} [\mathcal{G}_R] + \frac{\vec{L}_R^2}{2M \mathcal{G}_R^2} \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} [\mathcal{G}_P] + \frac{\vec{L}_P^2}{2m \mathcal{G}_P^2} \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} [\mathcal{G}_N] + \frac{\vec{L}_N^2}{2m \mathcal{G}_N^2} \right).$$

T ist die Summe von drei formal gleichen Ausdrücken, welche die kinetischen Energien der einzelnen redu-

zierten Massen wiedergeben. Dabei sind $\vec{L}_R, \vec{L}_P$ und $\vec{L}_N$ die zugehörigen Bahndrehimpulsoperatoren und $[g]$ ist definiert durch:

$$(4.2) \quad [g] = \frac{\partial^2}{\partial g^2} + \frac{2}{g} \frac{\partial}{\partial g}$$

Da die vom Rumpf erzeugten Potentiale V_P und V_N die g -Achse als Symmetrieachse besitzen, verwenden wir diese als Quantisierungsachse und zerlegen die auftretenden Drehimpulsoperatoren auf die Achsen des körpergebundenen Koordinatensystems. Die ξ -, η - und g -Komponenten der Vektoren $\vec{L}_P$ bzw. $\vec{L}_N$ lassen sich relativ einfach aus infinitesimalen Drehungen des Protons bzw. Neutrons um die ξ -, η - und g -Achse bestimmen (vgl. [7]). Ergebnis:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} L_{P\xi} &= \frac{\hbar}{i} \cot u \left(\frac{\partial}{\partial g} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \\ L_{P\eta} &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial u} \\ L_{Pg} &= \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial g} \right) \\ L_{N\xi} &= \frac{\hbar}{i} \left(-\sin \delta \frac{\partial}{\partial v} - \cos \delta \cot v \frac{\partial}{\partial \delta} \right) \\ L_{N\eta} &= \frac{\hbar}{i} \left(\cos \delta \frac{\partial}{\partial v} - \sin \delta \cot v \frac{\partial}{\partial \delta} \right) \\ L_{Ng} &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \delta} . \end{aligned}$$

Will man nach der gleichen Methode die ξ -, η - und

ζ -Komponente von $\vec{L}_R$ bestimmen, so stößt man auf Schwierigkeiten. Bei infinitesimalen Drehungen der Masse M um die ξ -, η - und ζ -Achse ändern sich nämlich alle Winkelgrößen $u, v, \delta, \alpha, \beta, \gamma$ - und dies in geometrisch schwer überschaubarer Weise. Sehr viel rascher führt der folgende Weg zum Ziel: man bestimmt zunächst die ξ -, η - und ζ -Komponente des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \vec{L}_R + \vec{L}_P + \vec{L}_N$$

aus infinitesimalen Drehungen des ξ - η - ζ -Systems um seine Achsen. Dann kann man die körpergebundenen Komponenten von $\vec{L}_R$ durch die von $\vec{L}$, $\vec{L}_P$ und $\vec{L}_N$ ausdrücken:

$$(4.4) \quad \vec{L}_R = \vec{L} - \vec{L}_P - \vec{L}_N.$$

Auf diese Weise erhalten wir für $\vec{L}$ und $\vec{L}_R$ die Komponenten:

$$(4.5) \quad L_\xi = \frac{\hbar}{i} \left(-\frac{\cos\gamma}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial\alpha} + \sin\gamma \frac{\partial}{\partial\beta} + \cot\beta \cos\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma} \right)$$

$$L_\eta = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial\alpha} + \cos\gamma \frac{\partial}{\partial\beta} - \cot\beta \sin\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma} \right)$$

$$L_\zeta = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial\gamma}$$

$$L_{R\xi} = L_\xi - \frac{\hbar}{i} \cot u \left(\frac{\partial}{\partial\delta} - \frac{\partial}{\partial\gamma} \right) + \frac{\hbar}{i} \sin\delta \frac{\partial}{\partial v} + \\ + \frac{\hbar}{i} \cos\delta \cot v \frac{\partial}{\partial\delta}$$

$$L_{R\eta} = L_{\eta} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\hbar}{i} (\cos \delta \frac{\partial}{\partial v} - \sin \delta \cot v \frac{\partial}{\partial \delta})$$

$$L_{R\zeta} = 0.$$

Wie man sieht, verschwindet die ζ -Komponente von $\vec{L}_R$ - ein Ausdruck dafür, daß die Hantel nicht um ihre eigene Achse, die ζ -Achse rotieren kann. Bemerkenswert ist weiterhin, daß in $\vec{L}_P$ und in $\vec{L}_R$ die Koordinaten α, β, δ des $\xi\eta\zeta$ -Systems auftreten. Das liegt daran, daß wir das $\xi\eta\zeta$ -Achsenkreuz ja gerade mit Hilfe der Vektoren $\vec{f}_R$ und $\vec{f}_P$ definiert haben. Die Art und Weise, wie wir das $\xi\eta\zeta$ -Achsenkreuz an die Masse M und an das Proton "angehängt" haben, bewirkt, daß im $\xi\eta\zeta$ -System die Masse M nur einen Freiheitsgrad ϑ_R und daß das Proton nur zwei Freiheitsgrade ϑ_P und u besitzt. Beide Teilchen haben also insgesamt 3 Freiheitsgrade in Form von α, β und δ an das $\xi\eta\zeta$ -System abgegeben. Die Tatsache, daß bei unserer Koordinatenwahl die verschiedenen Freiheitsgrade und damit die Variablen auf die (reduzierten) Massen anders aufgeteilt werden als bei der Beschreibung derselben Teilchen vom raumfesten System aus, führt bei $\vec{L}_P^2$ und $\vec{L}_R^2$ zu einem mathematischen Problem. Es zeigt sich nämlich, daß die Quadratsummen

$$(L_{P\xi}^2 + L_{P\eta}^2 + L_{P\zeta}^2) \text{ bzw. } (L_{R\xi}^2 + L_{R\eta}^2 + L_{R\zeta}^2)$$

nicht mehr die vollen Ausdrücke

$$(L_{Px}^2 + L_{Py}^2 + L_{Pz}^2) \text{ bzw. } (L_{Rx}^2 + L_{Ry}^2 + L_{Rz}^2)$$

enthalten. Vielmehr gilt:

$$\begin{aligned} \underline{(4.6)} \quad L_{Px}^2 + L_{Py}^2 + L_{Pz}^2 &= \\ &= L_{P\xi}^2 + L_{P\eta}^2 + L_{P\zeta}^2 - i\hbar \cot u \, L_{P\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{(4.7)} \quad L_{Rx}^2 + L_{Ry}^2 + L_{Rz}^2 &= \\ &= L_{R\xi}^2 + L_{R\eta}^2 + L_{R\zeta}^2 + i\hbar \cot u \, L_{R\eta} . \end{aligned}$$

Auch die Vertauschungsrelationen haben keine der gewohnten Formen. So erfüllen die körpergebundenen Komponenten von $\vec{L}_P$ und $\vec{L}_R$ weder die normalen noch die anomalen Vertauschungsrelationen, sondern es gelten die Beziehungen (4.8) und (4.9):

$$\underline{(4.8)} \quad [L_{P\xi}, L_{P\eta}] = \frac{i\hbar}{\sin^2 u} L_{P\zeta}$$

$$\begin{aligned} \underline{(4.9)} \quad [L_{R\xi}, L_{R\eta}] &= \frac{\hbar}{i} L_{R\zeta} - \frac{\hbar}{i} \cot^2 u \, L_{P\zeta} - \\ &\quad - \frac{\hbar}{i} \cot u \, (L_{P\xi} - L_{N\xi}) \end{aligned}$$

In die kinetische Energie (4.1) müssen wir für $\vec{L}_P^2$ und $\vec{L}_R^2$ sicher die Quadratsummen der raumfesten Komponenten, also

$$\vec{L}_P^2 = L_{Px}^2 + L_{Py}^2 + L_{Pz}^2 \quad \text{und}$$

$$\vec{L}_R^2 = L_{Rx}^2 + L_{Ry}^2 + L_{Rz}^2 \quad \text{einsetzen.}$$

Anknüpfend an die Darstellung (4.4) können wir den Operator $\vec{L}_R^2$ auch in der Form schreiben:

$$(4.10) \quad \vec{L}_R^2 = (\vec{L} - \vec{L}_P - \vec{L}_N)^2 = \\ = \vec{L}^2 + \vec{L}_P^2 + \vec{L}_N^2 - 2\vec{L} \cdot \vec{L}_P - 2\vec{L} \cdot \vec{L}_N + 2\vec{L}_N \cdot \vec{L}_P.$$

Dabei ist ausdrücklich zu betonen, daß

$$(\vec{L}^2 + \vec{L}_P^2 + \vec{L}_N^2 - 2\vec{L} \cdot \vec{L}_P - 2\vec{L} \cdot \vec{L}_N + 2\vec{L}_N \cdot \vec{L}_P)$$

nach [6] nur dann den richtigen (d.h. mit $L_{Rx}^2 + L_{Ry}^2 + L_{Rz}^2$ übereinstimmenden) Operator $\vec{L}_R^2$ liefert, wenn wir

(α) für $\vec{L}_P^2$ den Ausdruck (4.6) einsetzen

(β) in den nicht-kommutativen Skalarprodukten $\vec{L} \cdot \vec{L}_P$ und $\vec{L}_N \cdot \vec{L}_P$ die hier vorgeschriebene Reihenfolge der Drehimpulsoperatoren verwenden.

Damit können wir nun den Operator T für das 4-Teilchen-System ohne starre Bindungen in der Form schreiben:

$$(4.11) \quad T = -\frac{\hbar^2}{2M} [\mathcal{G}_R] - \frac{\hbar^2}{2m} [\mathcal{G}_P] - \frac{\hbar^2}{2m} [\mathcal{G}_N] + \\ + \frac{\vec{L}_P^2}{2m \mathcal{G}_P^2} + \frac{\vec{L}_N^2}{2m \mathcal{G}_N^2} + \frac{1}{2M \mathcal{G}_R^2} \left[\vec{L}^2 + \vec{L}_P^2 + \right. \\ \left. + \vec{L}_N^2 - 2\vec{L} \cdot \vec{L}_P - 2\vec{L} \cdot \vec{L}_N + 2\vec{L}_N \cdot \vec{L}_P \right].$$

Bei starrer Hantel, also bei $\mathcal{G}_R = \bar{\mathcal{G}}$, ist $\mathcal{G}_R$ keine

Variable mehr und deshalb der Operator $[S_R]$ wegzulassen. Wir erhalten dann für T:

$$(4.12) \quad T = -\frac{\hbar^2}{2m} [S_P] - \frac{\hbar^2}{2m} [S_N] + \frac{\vec{L}_P^2}{2m g_P^2} + \\ + \frac{\vec{L}_N^2}{2m g_N^2} + \frac{1}{2M \bar{g}^2} \left[\vec{L}^2 + \vec{L}_P^2 + \vec{L}_N^2 + \right. \\ \left. + 2\vec{L}_N \cdot \vec{L}_P - 2\vec{L} \cdot \vec{L}_P - 2\vec{L} \cdot \vec{L}_N \right].$$

Die bisherigen Überlegungen sollten im Grunde nur die Probleme aufzeigen, mit denen wir es im folgenden zu tun haben. Wir werden jedoch den Operator T nicht weiter in der Form (4.11) bzw. (4.12) verwenden, sondern im Hinblick auf den später zu wählenden Lösungsansatz die Operatoren

$$(4.13) \quad \vec{J}_P = \vec{L}_P + \vec{S}_P; \quad \vec{J}_N = \vec{L}_N + \vec{S}_N; \\ \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}_P + \vec{S}_N$$

einführen. Dabei sind $\vec{S}_P$ und $\vec{S}_N$ die (schon im Potential aufgetretenen) Spinvektoren für Proton und Neutron. Wir wollen nun auch die ξ -, η - und j -Komponenten der neuen Operatoren $\vec{J}$, $\vec{J}_P$ und $\vec{J}_N$ kennenlernen und bestimmen dazu zunächst die körpergebundenen Komponenten von $\vec{S}_P$ und $\vec{S}_N$. Den Spinvektor $\vec{S}$ eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens definieren wir folgendermaßen [8] :

$$(4.14) \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} e_z & e_x - i e_y; \\ e_x + i e_y; & -e_z \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ die Einheitsvektoren in X-, Y- und Z-Richtung sind. Skalare Multiplikation von $\vec{S}$ mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ liefert dann die körpergebundenen Komponenten S_ξ, S_η, S_ζ von $\vec{S}$:

$$(4.15) \quad S_\xi = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\sin\beta \cos\gamma; & e^{-i\alpha}(\cos\beta \cos\gamma - i \sin\beta) \\ e^{i\alpha}(\cos\beta \cos\gamma + i \sin\beta); & \sin\beta \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$S_\eta = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sin\beta \sin\gamma; & e^{-i\alpha}(-\cos\beta \sin\gamma - i \cos\beta) \\ e^{i\alpha}(-\cos\beta \sin\gamma + i \cos\beta); & -\sin\beta \sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$S_\zeta = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\beta; & e^{-i\alpha} \sin\beta; \\ e^{i\alpha} \sin\beta; & -\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Wir kennen damit auch die ξ -, η -, ζ -Komponenten der neu hinzugekommenen Operatoren $\vec{J}, \vec{J}_P, \vec{J}_N$. Diese drei Operatoren führen wir später im Operator der kinetischen Energie T ein, indem wir schreiben:

$$(4.16) \quad \vec{L}_R^2 = (\vec{J} - \vec{J}_P - \vec{J}_N)^2.$$

Beim Ausmultiplizieren treten folgende Skalarprodukte auf:

$$(a) \quad \vec{J}^2, \vec{J}_N^2, \vec{J} \cdot \vec{J}_N$$

$$(b) \quad \vec{J}_P^2, \vec{J}_P \cdot \vec{J}_N, \vec{J} \cdot \vec{J}_P$$

Die in (a) angeführten Operatoren sind unproblematisch. Wir können sie mit raumfesten oder mit körpergebundenen Komponenten ausrechnen und gelangen jedesmal zu dem gleichen Ergebnis. Außerdem ist das Produkt $\vec{J} \cdot \vec{J}_N$ kommutativ - auch bei Verwendung körpergebundener Komponenten. Dieselben Eigenschaften haben auch die sämtlichen Skalarprodukte, die entstehen, wenn wir in (a)

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}_P + \vec{S}_N \quad \text{oder} \quad \vec{J}_N = \vec{L}_N + \vec{S}_N$$

einsetzen und ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= (\vec{L} + \vec{S}_P + \vec{S}_N)^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}_P^2 + \vec{S}_N^2 + 2 \vec{L} \cdot \vec{S}_P + \\ &\quad + 2 \vec{L} \cdot \vec{S}_N + 2 \vec{S}_P \cdot \vec{S}_N \end{aligned}$$

$$\vec{J}_N^2 = (\vec{L}_N + \vec{S}_N)^2 = \vec{L}_N^2 + \vec{S}_N^2 + 2 \vec{L}_N \cdot \vec{S}_N$$

$$\begin{aligned} \vec{J} \cdot \vec{J}_N &= (\vec{L} + \vec{S}_P + \vec{S}_N)(\vec{L}_N + \vec{S}_N) = \vec{L} \cdot \vec{L}_N + \vec{L} \cdot \vec{S}_N + \vec{S}_P \cdot \vec{L}_N + \\ &\quad + \vec{S}_P \cdot \vec{S}_N + \vec{S}_N \cdot \vec{L}_N + \vec{S}_N^2. \end{aligned}$$

Dabei überrascht vor allem die Tatsache, daß sich die Produkte $\vec{L} \cdot \vec{S}_P$ bzw. $\vec{L} \cdot \vec{S}_N$ als kommutativ herausstellen, da ja in den Komponenten von $\vec{L}$ nach α, β und γ abgeleitet wird und da die Komponenten der Spinvektoren von ebendiesen Variablen abhängen.

Im Gegensatz zu den in (a) aufgetretenen Skalar-

produkten sind die in (b) zusammengestellten mit Vorsicht zu behandeln. So ist der Operator

$$\vec{j}_P^2 = j_{Px}^2 + j_{Py}^2 + j_{Pz}^2$$

wieder - wie schon $\vec{L}_P^2$ und $\vec{L}_R^2$ - verschieden von der Quadratsumme seiner körpergebundenen Komponenten. Es gilt nämlich:

$$(4.17) \quad \vec{j}_P^2 = j_{P\xi}^2 + j_{P\eta}^2 + j_{P\zeta}^2 - i\hbar \cot u \, j_{P\eta}.$$

Auch gelten wieder spezielle Vertauschungsrelationen für die körpergebundenen Komponenten von $\vec{j}_P$ (vgl. (4.8) und (4.9)):

$$(4.18) \quad [j_{P\xi}, j_{P\eta}] = -\frac{\hbar}{i} j_{P\zeta} + (i\hbar \cot^2 u \, L_{P\zeta} - i\hbar \cot u \, S_{P\xi})$$

Die Darstellung von $\vec{j}_P^2$ durch $\vec{L}_P$ und $\vec{S}_P$ lautet:

$$\vec{j}_P^2 = \vec{L}_P^2 + \vec{S}_P^2 + 2 \, \underline{\vec{S}_P \cdot \vec{L}_P}.$$

Dabei ist im nicht-kommutativen (hier unterstrichen) Produkt $\vec{S}_P \cdot \vec{L}_P$ auf die Reihenfolge der Vektoren zu achten.

Bei den Skalarprodukten $\vec{J} \cdot \vec{j}_P$ und $\vec{j}_P \cdot \vec{j}_N$ gehen wir entsprechend vor. Zuerst ermitteln wir die "richtigen" Ausdrücke mit Hilfe der raumfesten Komponenten. Dann versuchen wir diese als Skalarprodukte der Vektoren

$\vec{L}, \vec{S}_P, \vec{S}_N, \vec{L}_P$ und $\vec{L}_N$ zu schreiben, wobei wir jetzt körpergebundene Komponenten verwenden. Im Ergebnis werden nicht-kommutative Produkte wieder unterstrichen:

$$\begin{aligned}
 \underline{(4.19)} \quad \vec{J} \cdot \vec{j}_P &= (\vec{L} + \vec{S}_P + \vec{S}_N)(\vec{L}_P + \vec{S}_P) = \\
 &= \underline{\vec{L} \cdot \vec{L}_P} + \vec{L} \cdot \vec{S}_P + \underline{\vec{S}_P \cdot \vec{L}_P} + \vec{S}_P^2 + \\
 &\quad + \underline{\vec{S}_N \cdot \vec{L}_P} + \vec{S}_P \cdot \vec{S}_N \\
 \vec{j}_N \cdot \vec{j}_P &= (\vec{L}_N + \vec{S}_N)(\vec{L}_P + \vec{S}_P) = \\
 &= \underline{\vec{L}_N \cdot \vec{L}_P} + \vec{L}_N \cdot \vec{S}_P + \underline{\vec{S}_N \cdot \vec{L}_P} + \vec{S}_N \cdot \vec{S}_P.
 \end{aligned}$$

Wir haben damit alle Skalarprodukte kennengelernt, die sich aus den Vektoren

$$\vec{L}, \vec{L}_P, \vec{L}_N, \vec{S}_P, \vec{S}_N$$

bilden lassen und stellen fest: nur die Skalarprodukte, welche $\vec{L}_P$ enthalten, sind problematisch. Bei solchen Skalarprodukten haben wir darauf zu achten, daß $\vec{L}_P$ stets an zweiter Stelle steht. Diese Regel müssen wir natürlich auch beachten, wenn wir Summen oder Differenzen der oben genannten Vektoren miteinander multiplizieren, also beispielsweise beim Ausquadrieren von

$$\vec{j}_P^2 = (\vec{L}_P + \vec{S}_P)^2$$

Nach dem bisher Gesagten überzeugt man sich leicht,

daß der Operator $\vec{L}_R^2$ (vgl.(4.6)) in der Form

$$(4.20) \quad \vec{L}_R^2 = \vec{J}^2 + \vec{J}_P^2 + \vec{J}_N^2 - 2 \cdot \vec{J} \cdot \vec{J}_P - \\ - 2 \cdot \vec{J} \cdot \vec{J}_N + 2 \cdot \vec{J}_N \cdot \vec{J}_P$$

geschrieben werden kann. Diesen Ausdruck für $\vec{L}_R^2$ setzen wir in die kinetische Energie T ein. Außerdem sollen nun auch in den Potentialen V_P , V_N und V_{PN} körpergebundene Drehimpuls- und Spinkomponenten verwendet werden. Dann tritt in V_P^{Nil} ein nicht-kommutatives Skalarprodukt $\vec{S}_P \cdot \vec{L}_P$ auf.

Der Hamiltonoperator unseres uu-Kern-Modells mit schwingendem Rumpf lautet damit:

$$(4.21) \quad H = T + V = \\ = - \frac{\hbar^2}{2M} [\mathfrak{g}_R] + \left(\frac{A}{\mathfrak{g}_R^2} + B \mathfrak{g}_R^2 \right) + \\ + \frac{1}{2M\mathfrak{g}_R^2} \underbrace{\left[\vec{J}^2 + \vec{J}_P^2 + \vec{J}_N^2 - 2\vec{J} \cdot \vec{J}_P - 2\vec{J} \cdot \vec{J}_N + 2 \cdot \vec{J}_N \cdot \vec{J}_P \right]}_{\vec{L}_R^2} \\ + H_P^{Nil}(\bar{\omega}; \bar{B}) + H_N^{Nil}(\bar{\omega}; \bar{B}) + \frac{m}{2}(\omega^2 - \bar{\omega}^2)(\mathfrak{g}_P^2 + \mathfrak{g}_N^2) - \\ - m(\omega^2 \bar{B} - \bar{\omega}^2 \bar{B})(\mathfrak{g}_P^2 Y_{20}(u, 0) + \mathfrak{g}_N^2 Y_{20}(v, 0)) +$$

$$+ \frac{V_0}{\lambda^3} \delta(\vec{g}_P - \vec{g}_N)(1 - \bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{\hbar^2} \vec{S}_P \cdot \vec{S}_N) ,$$

wobei gesetzt wurde:

(4.22)

$$H_P^{Nil}(\bar{\omega}; \bar{g}) = - \frac{\hbar^2}{2m} [g_P] + \frac{\vec{L}_P^2}{2m g_P^2} + \frac{m}{2} \bar{\omega}^2 g_P^2 - \\ - m \bar{\omega}^2 \bar{g} g_P^2 Y_{20}(u, 0) + D_P \vec{L}_P^2 + C_P \vec{S}_P \cdot \vec{L}_P ;$$

(4.23)

$$H_N^{Nil}(\bar{\omega}; \bar{g}) = - \frac{\hbar^2}{2m} [g_N] + \frac{\vec{L}_N^2}{2m g_N^2} + \frac{m}{2} \bar{\omega}^2 g_N^2 - \\ - m \bar{\omega}^2 \bar{g} g_N^2 Y_{20}(v, 0) + D_N \vec{L}_N^2 + C_N \vec{S}_N \cdot \vec{L}_N .$$

Aus (4.21) erhalten wir den Hamiltonoperator für das System mit starrer Hantel, indem wir den Operator $[g_R]$ weglassen und ansonsten setzen:

$$A = B = 0; \quad g_R = \bar{g}; \quad B(g_R) = \bar{g}; \quad \omega(g_R) = \bar{\omega} .$$

V. Ein Ansatz zur Lösung der Schrödingergleichung

Als Ausgangspunkt verwenden wir den Hamiltonoperator (4.21) für ein uu-Kern-Modell mit schwingendem Rumpf. Wir suchen die gemeinsamen Eigenfunktionen dieses Hamiltonoperators H und der mit ihm vertauschbaren Operatoren

$$\vec{J}^2, J_z, P \text{ und } E_R,$$

die teilweise noch zu definieren sind.

Den Operator $\vec{J}^2$ kennen wir schon aus Kapitel 4.

Die z -Komponente J_z des Vektors $\vec{J}$ ist:

$$(5.1) \quad J_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} + S_{Pz} + S_{Nz}.$$

P ist der Paritätsoperator, der alle Teilchen unseres 4-Teilchen-Systems am Gesamtschwerpunkt S spiegelt. Die P -Operation führt zu der Koordinatentransformation:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \alpha &\longrightarrow \pi + \alpha; \quad \beta \longrightarrow \pi - \beta; \quad \gamma \longrightarrow \pi - \gamma; \\ u &\longrightarrow u; \quad v \longrightarrow v; \quad \delta \longrightarrow 2\pi - \delta; \\ \vartheta_R &\longrightarrow \vartheta_R; \quad \vartheta_P \longrightarrow \vartheta_P; \quad \vartheta_N \longrightarrow \vartheta_N. \end{aligned}$$

Bei der Operation E_R werden die beiden Hantelmassen vertauscht. Das entspricht einer Spiegelung des gg-Rumpfes an seiner Symmetrieebene, welche durch den Rumpfschwerpunkt geht und auf der Rumpfachse senkrecht steht (vgl. Abb. 1). Die zugehörige Koordinatentransformation ist:

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad & \mathcal{G}_R \rightarrow \mathcal{G}_R; \quad \mathcal{G}_P \rightarrow \mathcal{G}_P; \quad \mathcal{G}_N \rightarrow \mathcal{G}_N; \\
 & \alpha \rightarrow \pi + \alpha; \quad \beta \rightarrow \pi - \beta; \quad \gamma \rightarrow 2\pi - \gamma; \\
 & u \rightarrow \pi - u; \quad v \rightarrow \pi - v; \quad \delta \rightarrow 2\pi - \delta.
 \end{aligned}$$

Die gesuchten gemeinsamen Eigenfunktionen der Operatoren $H, \vec{J}^2, J_z, P$ und E_R bezeichnen wir mit $|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle$. Sie müssen folgende Eigenwertgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad & H|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle = E|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle \\
 & \vec{J}^2|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle = \hbar^2 J(J+1)|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle \\
 & J_z|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle = \hbar M|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle \\
 & P|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle = \pi|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle \\
 & E_R|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle = \epsilon_R|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle.
 \end{aligned}$$

Um einen passenden Ansatz für die Funktionen $|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle$ zu finden, gehen wir schrittweise vor.

(A) Die Winkelanteile der Basisfunktionen:

Als erstes konstruieren wir im raumfesten System gemeinsame Eigenfunktionen von $\vec{J}^2$ und J_z . Da diese nur von den Winkeln abhängen, müssen sie später noch durch Radialfunktionen (= Funktionen von $\mathcal{G}_R, \mathcal{G}_P, \mathcal{G}_N$) ergänzt werden. Wir beschreiben die reduzierte Rumpfmasse M , sowie Proton und Neutron durch die im XYZ-System definierten Polarkoordinaten $(\mathcal{G}_R, \vartheta_R, \varphi_R), (\mathcal{G}_P, \vartheta_P, \varphi_P)$ und $(\mathcal{G}_N, \vartheta_N, \varphi_N)$. Da sich $\vec{J}$ als Summe der Vektoren $\vec{L}_R, \vec{L}_P, \vec{L}_N, \vec{S}_P, \vec{S}_N$ schreiben läßt, können wir die gesuchten Eigenfunktionen von $\vec{J}^2$ und J_z als Clebsch-Gordon-Summe von Funktionen

$$Y_{L_R; m_R}(\vartheta_R, \varphi_R) Y_{L_P; m_P}(\vartheta_P, \varphi_P) Y_{L_N; m_N}(\vartheta_N, \varphi_N) |\epsilon_P\rangle |\epsilon_N\rangle$$

darstellen. Dabei sind $|\epsilon_P\rangle$ und $|\epsilon_N\rangle$ Spinoren für Proton und Neutron mit

$$(5.5) \quad \vec{S}_P^2 |\epsilon_P\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |\epsilon_P\rangle; \quad S_{Pz} |\epsilon_P\rangle = \hbar \epsilon_P |\epsilon_P\rangle;$$

(Analog für $|\epsilon_N\rangle$)

und alle Projektionsquantenzahlen $m_R, m_P, m_N, \epsilon_P, \epsilon_N$ beziehen sich auf die Z-Achse. Wenn wir die Drehimpulse $\vec{L}_R, \vec{L}_P, \vec{L}_N, \vec{S}_P, \vec{S}_N$ in der Reihenfolge

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \vec{J} &= \vec{L}_R + [(\vec{L}_P + \vec{S}_P) + (\vec{L}_N + \vec{S}_N)] = \\ &= \vec{L}_R + \begin{bmatrix} \vec{J}_P & + & \vec{J}_N \end{bmatrix} = \vec{L}_R + \vec{J}_{PN} \end{aligned}$$

zusammenkoppeln, erhalten wir Eigenfunktionen der Operatoren $\vec{J}^2, J_z, \vec{J}_{PN}^2, \vec{L}_R^2, \vec{J}_P^2, \vec{J}_N^2, \vec{L}_P^2, \vec{L}_N^2, \vec{S}_P^2$ und $\vec{S}_N^2$ mit folgender Gestalt:

$$(5.7) \quad |J, M, J_{PN}, L_R, j_P, j_N, L_P, L_N, S_P, S_N\rangle =$$

$$\sum_{m_P + \epsilon_P = \mu_P} \sum_{m_N + \epsilon_N = \mu_N} \sum_{\mu_P + \mu_N = N} \sum_{N + m_R = M}$$

$$C_{\mu_P \mu_N}^{j_P j_N J_{PN}} C_N^{J_{PN} L_R J} C_{m_P}^{L_P \frac{1}{2}} C_{\mu_P}^{j_P} C_{m_N}^{L_N \frac{1}{2}} C_{\epsilon_N}^{j_N}.$$

$$Y_{L_R; m_R}(\vartheta_R, \varphi_R) Y_{L_P; m_P}(\vartheta_P, \varphi_P) Y_{L_N; m_N}(\vartheta_N, \varphi_N) |\epsilon_P\rangle |\epsilon_N\rangle.$$

Nun drücken wir in dieser Summe die auf das XYZ-System bezogenen Kugelfunktionen und Spinoren durch Kugelfunktionen und Spinoren aus, die auf das $\xi\eta\zeta$ -System bezogen sind:

$$(5.8) \quad Y_{L_R; m_R}(\vartheta_R, \varphi_R) = \sqrt{\frac{2L_R+1}{4\pi}} D_{m_R; 0}^{L_R*}(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$Y_{L_P; m_P}(\vartheta_P, \varphi_P) = \sum_{\Lambda_P = -L_P}^{+L_P} D_{m_P; \Lambda_P}^{L_P*}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0)$$

$$Y_{L_N; m_N}(\vartheta_N, \varphi_N) = \sum_{\Lambda_N = -L_N}^{+L_N} D_{m_N; \Lambda_N}^{L_N*}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{L_N; \Lambda_N}(v, \delta)$$

$$|\zeta_P\rangle = \sum_{\Sigma_P = -\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} D_{\zeta_P; \Sigma_P}^{\frac{1}{2}*}(\alpha, \beta, \gamma) |\Sigma_P\rangle.$$

$$|\zeta_N\rangle = \sum_{\Sigma_N = -\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} D_{\zeta_N; \Sigma_N}^{\frac{1}{2}*}(\alpha, \beta, \gamma) |\Sigma_N\rangle.$$

Dabei sollen die Funktionen $D_{mn}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma)$ wie in [8] definiert sein:

$$(5.9) \quad D_{mn}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im\alpha} d_{mn}^l(\beta) e^{in\gamma}.$$

Setzen wir (5.8) in (5.7) ein und verwenden anschließend die Beziehung

$$(5.10) \quad \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1}^{l_1} C_{m_2}^{l_2} C_m^l D_{m_1 n_1}^{l_1*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 n_2}^{l_2*}(\alpha, \beta, \gamma) = \\ = C_{n_1}^{l_1} C_{n_2}^{l_2} C_{(n_1+n_2)}^l D_{m, n_1+n_2}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma),$$

so erhalten wir:

$$(5.11) \quad |J, M, J_{PN}, L_R, j_P, j_N, L_P, L_N, S_P, S_N\rangle = \\ + \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_P = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{\Sigma_N = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{\Lambda_P = -L_P}^{+L_P} \sum_{\Lambda_N = -L_N}^{+L_N} C_{\Lambda_P}^{L_P} C_{\Sigma_P}^{\frac{1}{2}} C_{\mu_P}^{j_P} C_{\Lambda_N}^{L_N} C_{\Sigma_N}^{\frac{1}{2}} C_{\mu_N}^{j_N} \cdot \\ C_{\mu_P}^{j_P} C_{\mu_N}^{j_N} C_N^{J_{PN}} C_N^{J_{PN}} C_O^{L_R} C_K^J \sqrt{\frac{2L_R+1}{4\pi}} Y_{L_P, \Lambda_P}(u, 0) \cdot \\ Y_{L_N, \Lambda_N}(v, \delta) |\Sigma_P\rangle |\Sigma_N\rangle D_{MK}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma).$$

mit $K = \Lambda_P + \Lambda_N + \Sigma_P + \Sigma_N$.

In dieser Vierfachsumme wollen wir nun noch einige geringfügige Umformungen vornehmen:

(a) Wir setzen $N=K$, da der Clebsch-Gordon-Koeffizient

$$C_N^{J_{PN}} C_O^{L_R} C_K^J$$

nur für $N=K$ von Null verschieden ist.

(b) Wir ersetzen die Summe über Λ_P durch eine Summe über K , wobei wir K von $(-J)$ bis $(+J)$ laufen lassen. Bei der bisherigen Summation durchlief K alle ganzen Zahlen mit

$$-1-L_P-L_N \leq K \leq 1+L_P+L_N.$$

Wir müssen deshalb prüfen, ob wir für

$$-J \leq K \leq +J$$

die gleiche Vierfachsumme erhalten. Sicher haben wir das neue K-Intervall groß genug gewählt, da der oben angegebene Clebsch-Gordon-Koeffizient alle Summanden zu $|K| > J$ zu Null machen würde. Andererseits könnten aber für K-Werte mit

$$(1+L_P+L_N) < |K| \leq J$$

neue Summanden hinzugekommen sein. Für solche K-Werte gilt aber

$$|K| > 1+L_P+L_N = S_P + S_N + L_P + L_N \gg J_{PN}$$

$$\text{also } |K| > J_{PN}.$$

Die zugehörigen Summanden verschwinden wieder wegen

$$C_N^{J_{PN}} O^{L_R} K^J = C_K^{J_{PN}} O^{L_R} K^J = 0.$$

Unter Verwendung von (a) und (b) können wir unsere Vierfachsumme in der Form schreiben:

$$(5.12) \quad |J, M, J_{PN}, L_R, j_P, j_N, L_P, L_N, S_P, S_N\rangle =$$

$$= \sum_{K=-J}^{+J} G_{J_{PN}, L_R, j_P, j_N, \dots}^K (u, v, \delta, \Sigma_P, \Sigma_N) D_{MK}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Die Funktionen G hängen nur von inneren Koordinaten ab und lauten:

$$\begin{aligned}
 (5.13) \quad G_{J_{PN}, L_R, j_P, j_N, \dots}^K(u, v, \delta, \Sigma_P, \Sigma_N) = \\
 = \sqrt{\frac{2L_R+1}{4\pi}} \sum_{\Sigma_P=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{\Sigma_N=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{\Lambda_N=-L_N}^{+L_N} C_{\Lambda_P \Sigma_P \mu_P}^{L_P \frac{1}{2} j_P} \cdot \\
 C_{\Lambda_N \Sigma_N \mu_N}^{L_N \frac{1}{2} j_N} C_{\mu_P \mu_N K}^{j_P j_N j_{PN}} C_K^{j_{PN} L_R j} Y_{L_P i \Lambda_P}(u, 0) \cdot \\
 Y_{L_N i \Lambda_N}(v, \delta) |\Sigma_P\rangle |\Sigma_N\rangle \quad \text{mit} \quad \Lambda_P = K - \Lambda_N - \Sigma_P - \Sigma_N.
 \end{aligned}$$

Denken wir zurück an die zu Kapitelbeginn gestellte Aufgabe! Wir wollten die gemeinsamen Eigenfunktionen der Operatoren $H, \vec{J}^2, J_z, P$ und E_R (Bezeichnung: $|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle$) nach einem geeigneten Funktionensystem entwickeln. Als ersten Schritt hierzu haben wir auf den vorangehenden Seiten gemeinsame Eigenfunktionen von $\vec{J}^2$ und J_z konstruiert. Man kann durch Nachrechnen zeigen, daß diese Eigenfunktionen von $\vec{J}^2$ und J_z tatsächlich auch Eigenfunktionen der Operatoren P und E_R sind, und zwar gilt:

$$A_{J_{PN}, L_R, \dots, S_N, l}^{J, M, E, \pi, \epsilon_R} f_1(g_R, g_P, g_N) |J, M, \pi, \epsilon_R, J_{PN}, \dots\rangle$$

Damit solch eine Funktion $|J, M, E, \pi, \epsilon_R\rangle$ eine Eigenfunktion der Operatoren P und E_R zu den Quantenzahlen π und ϵ_R ist, darf in (5.18) nur über solche Werte von L_R, L_P und L_N summiert werden, welche (5.16) erfüllen. Außerdem müssen wegen (5.6) folgende Ungleichungen beachtet werden:

$$(5.19) \quad |J_{PN} - L_R| \leq J \leq J_{PN} + L_R; \quad |j_P - j_N| \leq J_{PN} \leq j_P + j_N; \\ |L_P - \frac{1}{2}| \leq j_P \leq L_P + \frac{1}{2}; \quad |L_N - \frac{1}{2}| \leq j_N \leq L_N + \frac{1}{2}.$$

Unser nächstes Ziel ist es nun, die in (5.17) angekündigten Funktionen $f_1(g_R, g_P, g_N)$ zu bestimmen. Da im Protonen- und Neutronenpotential jeweils das Potential eines harmonischen Oszillators der Masse m und der Frequenz $\bar{\omega}$ enthalten ist, schreiben wir die Funktionen f_1 in der Form

$$(5.20) \quad Q(g_R) R_{n_P; L_P}(g_P) R_{n_N; L_N}(g_N).$$

Dabei sind die mit R bezeichneten Funktionen jeweils Radialfunktionen eines harmonischen Oszillators der Masse m und der Frequenz ω , haben also die Eigenschaft:

$$(5.21) \quad \int_0^\infty R_{n; l}(g) R_{\bar{n}; l}(g) g^2 dg = \delta_{\bar{n}n}.$$

Mit der Transformation " $x = \rho^2 \lambda^2$ ", wobei λ wie in (3.4) definiert sei, lautet die Darstellung der Funktion $R_{n,l}(\rho)$:

$$(5.22) \quad R_{n,l}(\rho) =_{\text{Def}} \bar{R}_{n,l}(x) = \sqrt{\frac{2 \cdot n! \lambda^3}{\Gamma(n + \frac{1}{2})}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}} L_n^{1+\frac{1}{2}}(x),$$

wobei $L_n^{1+\frac{1}{2}}(x)$ ein verallgemeinertes Laguerre-Polynom ist.

Die Funktionen $Q(\rho_R)$ bestimmen wir, indem wir die Schrödingergleichung (5.23) der schwingenden Hantel lösen:

$$(5.23) \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \left[\rho_R \right] + \frac{\vec{L}_R^2}{2M \rho_R^2} + \frac{A}{\rho_R^2} + B \rho_R^2 - E \right)$$

$$Q(\rho_R) Y_{L_R, m_R}(\vartheta_R, \varphi_R) = 0.$$

Dabei haben wir die Masse M durch die im raumfesten System definierten Polarkoordinaten $(\rho_R, \vartheta_R, \varphi_R)$ beschrieben. Mit der Beziehung

$$(5.24) \quad \vec{L}_R^2 Y_{L_R, m_R}(\vartheta_R, \varphi_R) = \hbar^2 L_R(L_R + 1) Y_{L_R, m_R}$$

erhalten wir aus (5.23) eine DGL für die Funktionen $Q(\rho_R)$ allein:

$$(5.25)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \left[\rho_R \right] + \frac{\hbar^2 L_R(L_R + 1)}{2M \rho_R^2} + \frac{A}{\rho_R^2} + B \rho_R^2 - E \right) Q(\rho_R) = 0$$

Nun führen wir die Variablentransformation

$$(5.26) \quad g_R^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2MB}} \xi; \quad Q(g_R) =_{\text{Def}} \bar{Q}(\xi);$$

durch und setzen:

$$(5.27) \quad p(L_R) = \frac{1}{4} \left[-1 + \sqrt{(2L_R+1)^2 + \frac{8MA}{\hbar^2}} \right]$$

$$(5.28) \quad n_R(L_R) = \sqrt{\frac{M}{8B}} \frac{E}{\hbar} - \frac{3}{4} - p(L_R).$$

Damit erhält die DGL (5.25) die Form:

$$(5.29) \quad \bar{Q}'' + \frac{3}{2\xi} \bar{Q}' + \left[\frac{n_R + p + \frac{3}{4}}{\xi} - \frac{p(p+\frac{1}{2})}{\xi^2} - \frac{1}{4} \right] \bar{Q} = 0.$$

Wir suchen zuerst die normierbaren asymptotischen Lösungen dieser DGL für $\xi \rightarrow \infty$ und $\xi \rightarrow 0$. Man sieht sofort, daß sich $\bar{Q}$ für $\xi \rightarrow \infty$ wie $\exp(-\frac{1}{2}\xi)$ verhält. Bevor wir die asymptotische Lösung für $\xi \rightarrow 0$ bestimmen, beseitigen wir das Glied

$$\frac{3 \cdot \bar{Q}}{2 \cdot \xi}$$

durch die Transformation: $\bar{Q}(\xi) = H(\xi) \cdot \xi^{-\frac{3}{4}}$. Aus der entstehenden DGL

$$(5.30)$$

$$H'' + \frac{H}{\xi^2} \left(\frac{3}{16} - p^2 - \frac{p}{2} \right) + \frac{H}{\xi} \left(n_R + p + \frac{3}{4} \right) - \frac{H}{4} = 0.$$

finden wir, daß sich eine normierbare Funktion $\bar{Q}(\xi)$ für $\xi \rightarrow 0$ wie ξ^p verhält. Unter Berücksichtigung der asymptotischen Lösungen können wir dann $\bar{Q}$ in der Form schreiben:

$$(5.31) \quad \bar{Q}(\xi) = W(\xi) \cdot \xi^p \cdot e^{-\frac{\xi}{2}}.$$

Aus der DGL (5.29) für $\bar{Q}$ folgt dann für die Funktion W :

$$(5.32) \quad \xi W'' + (2p + \frac{3}{2} - \xi) W' + n_R W = 0$$

und daraus:

$$(5.33) \quad W(\xi) = F(-n_R, 2p + \frac{3}{2}, \xi).$$

n_R muß darin eine nicht-negative ganze Zahl sein, also $n_R = 0, 1, 2, \dots$. Wir haben damit zu jedem vorgegebenen Wert von L_R unendlich viele Lösungen $Q(g_R) = \bar{Q}(\xi)$ der DGL (5.25) erhalten, die wir mit den Indizes L_R und n_R durchnummerieren können:

$$(5.34) \quad Q_{n_R; L_R}(g_R) = \bar{Q}_{n_R; L_R}(\xi) = \\ = A_{n_R; L_R} \cdot F(-n_R, 2p + \frac{3}{2}, \xi) \cdot e^{-\frac{\xi}{2}} \cdot \xi^p$$

Dabei ist A eine Normierungskonstante und F die konfluente hypergeometrische Funktion, welche mit den verallgemeinerten Laguerre-Polynomen über die Be-

ziehung zusammenhängt:

$$(5.35) \quad L_{n_R}^{2p+\frac{1}{2}}(\xi) = \frac{\Gamma(2p+\frac{3}{2}+n_R)}{\Gamma(2p+\frac{3}{2})} F(-n_R, 2p+\frac{3}{2}, \xi).$$

Über die Orthogonalitätsrelationen der Laguerrepolynome können wir die Konstante A so bestimmen, daß gilt:

$$(5.36) \quad \int_0^\infty Q_{n_R; L_R}(\varrho_R) \bar{Q}_{\bar{n}_R; L_R}(\varrho_R) \varrho_R^2 d\varrho_R = \delta_{\bar{n}_R; n_R}$$

Die sich hieraus ergebenden Funktionen $Q_{n_R; L_R}(\varrho_R)$ lauten dann unter Verwendung der Abkürzung $\sqrt{2MB} = \hbar U$:

$$(5.37) \quad Q_{n_R; L_R}(\varrho_R) = \bar{Q}_{n_R; L_R}(\xi) = \\ = \sqrt{\frac{2(n_R)! U^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(2p+\frac{3}{2}+n_R)}} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^p L_{n_R}^{2p+\frac{1}{2}}(\xi).$$

Wir kennen damit die stationären Zustände

$$Q_{n_R; L_R}(\varrho_R) Y_{L_R; m_R}(\vartheta_R, \varphi_R)$$

der im Potential (3.7) schwingenden Hantel. Die zugehörigen Energiewerte erhalten wir, indem wir die Gleichung (5.28) nach der Energie E auflösen:

(5.38)

$$E_{n_R; L_R} = \hbar \sqrt{\frac{8B}{M}} \left[n_R + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{L_R(L_R+1) + \frac{1}{4} + \frac{2MA}{\hbar^2}} \right].$$

Wir wissen nun auch, wie das vollständige und orthonormierte Funktionensystem (5.17) aussieht, nach dem wir die gemeinsamen Eigenfunktionen $|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle$ der Operatoren $H, \vec{J}^2, J_z, P$ und E_R entwickeln wollten. Die Entwicklungsfunktionen haben die Form:

$$(5.39) \quad Q_{n_R; L_R}(\vartheta_R) \cdot R_{n_P; L_P}(\vartheta_P) \cdot R_{n_N; L_N}(\vartheta_N).$$

$$\cdot |J, M, \pi, \epsilon_R, J_{PN}, L_R, j_P, j_N, L_P, L_N, S_P, S_N\rangle$$

$$\text{mit } \epsilon_R = (-1)^{L_R}; \quad \pi = (-1)^{L_R + L_P + L_N}.$$

Ihre Bestandteile sind in (5.11), (5.22) und (5.37) angegeben.

VI. Die Wirkung der Drehimpulsoperatoren auf ihre körpergebundenen Eigenfunktionen

In der Clebsch-Gordon-Summe (5.11) haben wir gemäß ihrer Konstruktion eine gemeinsame Eigenfunktion der Drehimpulsoperatoren $\vec{J}^2$, $\vec{L}_R^2$, $\vec{J}_{PN}^2$, $\vec{J}_P^2$, $\vec{J}_N^2$, $\vec{L}_P^2$, $\vec{L}_N^2$, $\vec{S}_P^2$ und $\vec{S}_N^2$ vor uns und kennen also die zugehörigen Eigenwerte. Andererseits ist bekannt, daß Drehimpulsoperatoren, wenn man sie (wie hier) in teilweise körpergebundenen Koordinaten ausdrückt, eine andere Wirkung auf entsprechende Funktionen haben als bei der Wahl raumfester Koordinaten. Wir können also fragen: Wie müssen die Operatoren $\vec{J}^2$, $\vec{L}_R^2$, $\vec{J}_{PN}^2$, ... auf die Kugelfunktionen, Spinoren und $D_{M;K}^{J*}$ in den einzelnen Summanden von (5.11) wirken, damit sie "in Wirkung auf die gesamte Summe (5.11)" die richtigen Eigenwerte liefern?!

Diese Frage läßt sich für die Operatoren $\vec{L}_N^2$, $\vec{S}_P^2$ und $\vec{S}_N^2$ leicht beantworten. Der Operator $\vec{L}_N^2$ enthält nur Ableitungen nach v und δ , wirkt also nur auf die Funktionen $Y_{L_N; \Lambda_N}(v, \delta)$:

(6.1)

$$\begin{aligned} \vec{L}_N^2 Y_{L_N; \Lambda_N}(v, \delta) &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{1}{\sin^2 v} \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} + \cot v \frac{\partial}{\partial v} \right) Y_{L_N; \Lambda_N} = \\ &= \hbar^2 L_N(L_N+1) Y_{L_N; \Lambda_N}(v, \delta). \end{aligned}$$

Damit gilt auch für die Gesamtsumme (5.11):

$$\vec{L}_N^2 |J, M, L_R, \dots, L_N, \dots\rangle = \hbar^2 L_N(L_N+1) |J, M, L_R, \dots, L_N, \dots\rangle$$

Die Operatoren $\vec{S}_P^2$ und $\vec{S}_N^2$ sind ebenso unproblematisch. Sie wirken in jedem Summanden der Clebsch-Gordon-Summe nur auf je einen Spinor $|\Sigma_P\rangle$ bzw. $|\Sigma_N\rangle$ mit

$$(6.2) \quad \vec{S}_P^2 |\Sigma_P\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |\Sigma_P\rangle; \quad \vec{S}_N^2 |\Sigma_N\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |\Sigma_N\rangle.$$

Komplizierter liegt der Fall beim Operator $\vec{L}_P^2$. Dieser enthält Ableitungen nach den Variablen u, ϑ und δ (vgl. (4.3)):

$$(6.3) \quad \vec{L}_P^2 =_{\text{Df}} L_{Px}^2 + L_{Py}^2 + L_{Pz}^2 = \\ = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin^2 u} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial \delta} \right)^2 + \cot u \frac{\partial}{\partial u} \right].$$

Sucht man Funktionen von u, ϑ und δ , welche Eigenfunktionen des Operators (6.3) sind, so stößt man auf:

$$(6.4) \quad M_{L_P, \Lambda_P, \Lambda_N}(u, \vartheta, \delta) =_{\text{Df}} Y_{L_P, \Lambda_P}(u, 0) e^{i(\Lambda_P + \Lambda_N)\vartheta} e^{i\Lambda_N \delta}$$

mit

$$(6.5) \quad \vec{L}_P^2 M_{L_P, \Lambda_P, \Lambda_N} = \hbar^2 L_P(L_P + 1) M_{L_P, \Lambda_P, \Lambda_N}.$$

Wir überzeugen uns davon, daß die Beziehung (6.5) richtig ist und gehen dazu von der bekannten Drehimpulseigenwertgleichung

(6.6)

$$\begin{aligned}
 & -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot u \frac{\partial}{\partial u} \right] Y_{L_P; \Lambda_P}(u, \vartheta) = \\
 & = \hbar^2 L_P(L_P+1) Y_{L_P; \Lambda_P}(u, \vartheta)
 \end{aligned}$$

aus, welche für jede Kugelfunktion $Y_{L_P; \Lambda_P}(u, \vartheta)$ gilt. Wegen

(6.7) $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{L_P; \Lambda_P}(u, \vartheta) = i \Lambda_P Y_{L_P; \Lambda_P}(u, \vartheta)$

erhalten wir aus (6.6):

(6.8)

$$\begin{aligned}
 & -\hbar^2 \underbrace{\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\Lambda_P^2}{\sin^2 u} + \cot u \frac{\partial}{\partial u} \right]}_{=_{\text{Def}} \vec{L}_P^2(\Lambda_P)} Y_{L_P; \Lambda_P}(u, \vartheta) = \\
 & = \hbar^2 L_P(L_P+1) Y_{L_P; \Lambda_P}(u, \vartheta).
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert speziell für $\vartheta=0$:

(6.9) $\vec{L}_P^2(\Lambda_P) Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0) = \hbar^2 L_P(L_P+1) Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0).$

Aus diesem Zwischenergebnis folgt aber sofort

$$\vec{L}_P^2 M_{L_P; \Lambda_P; \Lambda_N} = \vec{L}_P^2(\Lambda_P) M_{L_P; \Lambda_P; \Lambda_N} = \hbar^2 L_P(L_P+1) M_{L_P; \Lambda_P; \Lambda_N},$$

was in (6.5) behauptet worden war. Die Funktionen

$$M_{L_P; \Lambda_P; \Lambda_N} = Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0) e^{i(\Lambda_P + \Lambda_N)\delta} e^{i\Lambda_N \delta}$$

sind aber in jedem Summanden der Clebsch-Gordon-Summe $|J, M, L_R, J_{PN}, \dots\rangle$ enthalten. $\exp(i\Lambda_N \delta)$ ist gerade der δ -abhängige Anteil von $Y_{L_N; \Lambda_N}(v, \delta)$ und

$$e^{i(\Lambda_P + \Lambda_N)\delta} = e^{i(K - \sum_P - \sum_N)\delta}$$

ist gerade der δ -abhängige Anteil von $|\Sigma_P\rangle |\Sigma_N\rangle \cdot D_{MK}^{J*}$, wenn wir für $|\Sigma_P\rangle$ und $|\Sigma_N\rangle$ die Beziehung verwenden:

(6.10)

$$|\Sigma\rangle = \sum_{\sigma} D_{\sigma; \Sigma}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma) |\sigma\rangle$$

Für jeden Summanden der Clebsch-Gordon-Summe

$|J, M, J_{PN}, L_R, \dots\rangle$ gilt also:

(6.11)

$$\begin{aligned} & L_P^2 \left[Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0) Y_{L_N; \Lambda_N}(v, \delta) |\Sigma_P\rangle |\Sigma_N\rangle D_{MK}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) \right] = \\ & = \hbar^2 L_P(L_P + 1) \left[Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0) Y_{L_N; \Lambda_N}(v, \delta) |\Sigma_P\rangle |\Sigma_N\rangle D_{MK}^{J*} \right]. \end{aligned}$$

Diese Beziehung besteht aber nur unter der Voraus-
setzung, daß wir wie in (6.10) die körpergebunde-
nen Spinoren durch raumfeste ausdrücken und dann
die in $\vec{L}_P^2$ auftretenden Ableitungen nach ϑ auf
die Produkte

$$D_{\vec{S}_P; \vec{S}_P}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \vartheta) D_{\vec{S}_N; \vec{S}_N}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \vartheta) D_{M; K}^{J*}(\alpha, \beta, \vartheta)$$

wirken lassen.

Ein analoges Ergebnis erhalten wir für den Ope-
rator $\vec{J}^2$, den wir in der Form $(\vec{L} + \vec{S}_P + \vec{S}_N)^2$ darstellen.
Um die gewünschte Eigenwertgleichung

$$\vec{J}^2 |J, M, J_{PN}, L_R, \dots\rangle = \hbar^2 J(J+1) |J, M, J_{PN}, L_R, \dots\rangle$$

zu bekommen, müssen wir auch hier wieder nach der
Rechenregel verfahren: Ableitungen nach den Euler-
schen Winkeln (also auch der Operator $\vec{L}$) wirken
auf die Funktionen $D_{M; K}^{J*}(\alpha, \beta, \vartheta)$ und zusätzlich
auch auf die körpergebundenen Spinoren $|\Sigma_P\rangle$ und
 $|\Sigma_N\rangle$, die zu diesem Zweck wie in (6.10) durch
raumfeste Spinoren ausgedrückt werden. Auf diese
Weise erhält man:

$$(6.12) \quad \vec{J}^2 |\Sigma_P\rangle |\Sigma_N\rangle D_{M; K}^{J*} = \hbar^2 J(J+1) |\Sigma_P\rangle |\Sigma_N\rangle D_{M; K}^{J*}$$

Man kann sich durch Nachrechnen davon überzeugen,
daß man die obige Rechenregel auch befolgen muß,
um die richtigen Eigenwertgleichungen zu den ande-
ren Drehimpulsquadratoperatoren $\vec{J}_{PN}^2, \vec{J}_P^2, \vec{L}_R^2$, usw.

zu bekommen, wobei sich die berechnete Frage stellt:

"Warum wirkt der Operator $\vec{L}$ zwar auf die körpergebundenen Spinoren $|\Sigma_P\rangle$ und $|\Sigma_N\rangle$, nicht aber auf körpergebundene Kugelfunktionen $Y_{L_P;A_P}$ und $Y_{L_N;A_N}$?"

Um darauf eine Antwort zu finden, erinnern wir uns nochmals an die Definition des Operators $\vec{L}$. Wir erhielten $\vec{L}$, indem wir das 4-Teilchen-System infinitesimal um raumfeste Achsen drehen und die damit verbundenen Änderungen von Ortskoordinaten untersuchten. Da bei Drehungen des Gesamtsystems die inneren Koordinaten fest bleiben, enthält der Operator $\vec{L}$ nur die Eulerschen Winkel α, β und γ . Wichtig ist, daß hierbei keine Änderungen von Spinkoordinaten berücksichtigt werden. Die zur Definition von $\vec{L}$ durchgeführten Drehungen des Gesamtsystems werden also so vorgenommen, daß dabei die Spinvektoren von Proton und Neutron raumfest unverändert bleiben. Die zu $\vec{L}$ gehörige Drehung bewirkt somit

(a) im raumfesten System:

die Ortskoordinaten ändern sich, die Spinkoordinaten nicht;

(b) im körpergebundenen System:

die Spinkoordinaten ändern sich, die Ortskoordinaten nicht.

Mathematisch hat etwa (b) zur Folge: Ableitungen nach den Eulerschen Winkeln und damit auch der Operator $\vec{L}$ wirken auf körpergebundene Spinoren, nicht

aber auf körpergebundene Kugelfunktionen. Dies ist jedoch genau die Vorschrift, nach der wir die richtigen Eigenwertgleichungen zu den Drehimpulsoperatoren erhielten. Diese Vorschrift ist immer dann anzuwenden, wenn der Operator $\vec{L}$ in der obigen Weise definiert wurde.

Als Ergänzung hierzu betrachten wir noch kurz den Operator $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}_P + \vec{S}_N$. Den Operator $\vec{L}$ haben wir durch eine infinitesimale Drehung des Gesamtsystems gewonnen, wobei die Spins raumfest liegen blieben. Den Operator $\vec{J}$ bekommt man aus einer Drehung des Gesamtsystems unter Mitnahme der Spinvektoren. Äquivalent hierzu ist eine entgegengesetzte Drehung des XYZ-Achsenkreuzes um seinen Ursprung. Da hierbei der Hamiltonoperator H unseres 4-Teilchen-Systems forminvariant bleibt, sind die Operatoren H und $\vec{J}$ vertauschbar.

VII. Symmetrisierte Nilssonfunktionen

In einem der folgenden Kapitel soll der bei (4.21) angegebene Hamiltonoperator H als Matrix dargestellt werden. Deren Diagonalisierung liefert dann das Energiespektrum zu unserem uu-Kern-Modell. Zur Berechnung von H als Matrix können wir das Funktionensystem (5.39) verwenden. Wir bezeichnen mit H_0 denjenigen Teil von H , der diese Funktionen als Eigenfunktionen besitzt und finden:

$$(7.1) \quad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2M} [g_R] + \frac{\vec{L}_R^2}{2M g_R^2} + V_R(g_R) + \\ + H_P^{\text{Nil}}(\vec{\omega}; \vec{\beta}=0) + H_N^{\text{Nil}}(\vec{\omega}; \vec{\beta}=0).$$

Die "Störung" ($H-H_0$) hat dann die Form:

$$(7.2) \quad (H-H_0) = \\ V_{PN} - m\omega^2 \beta \left[g_P^2 Y_{20}(u,0) + g_N^2 Y_{20}(v,0) \right] + \\ + \frac{m}{2} (\omega^2 - \vec{\omega}^2) (g_P^2 + g_N^2).$$

Offensichtlich bringt die Verwendung des Funktionensystems (5.39) Nachteile mit sich. So besteht das zu H_0 gehörige "ungestörte System" aus einer um einen Gleichgewichtsabstand schwingenden Hantel, durch deren Achse eine Raumrichtung bevorzugt wird, die aber von kugelsymmetrischen Potentialen umgeben ist.

Als Folge hiervon tritt dann im "Störoperator" $(H-H_0)$ die gesamte Deformation β der Nilssonpotentiale auf, deren Einfluß - wenigstens für eine konstante mittlere Deformation $\bar{E}$ - ja bereits von Nilsson diskutiert wurde.

Wir konstruieren deshalb im folgenden aus den Funktionen (5.39) ein geeigneteres Funktionensystem, welches aus Eigenfunktionen des Operators (vgl.(4.22)):

$$(7.3) \quad \bar{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2M} [g_R] + V_R(g_R) + \\ + H_P^{Nil}(\bar{\omega}; \bar{E} \neq 0) + H_N^{Nil}(\bar{\omega}; \bar{E} \neq 0)$$

besteht. Das ungestörte System enthält jetzt eine anisotrop schwingende Hantel mit $\vec{L}_R=0$, welche von ebenfalls anisotropen Nilssonpotentialen mittlerer Deformation $\bar{E}$ umgeben ist. Die Koordinaten in den Nilssonpotentialen sind natürlich nach wie vor so gewählt, daß die Hantelachse Symmetrieachse ist.

Die Störung $(H-\bar{H}_0)$ setzt sich nun zusammen aus den (kleinen) Schwingungen der Nilssonpotentiale um ihre mittlere Deformation, aus der Rumpfrotation und der Proton-Neutron-Wechselwirkung V_{PN} :

$$(7.4) \quad H - \bar{H}_0 = \\ \frac{m}{2}(\omega^2 - \bar{\omega}^2)(g_P^2 + g_N^2) + \frac{\vec{L}_R^2}{2M g_R} + V_{PN} - \\ - m(\omega^2 \beta - \bar{\omega}^2 \bar{\beta}) \left[g_P^2 Y_{20}(u, 0) + g_N^2 Y_{20}(v, 0) \right].$$

Der Operator $\bar{H}_0$, dessen Eigenfunktionen uns inte-

ressieren, enthält neben den vollständigen Nilssonoperatoren H_P^{Nil} und H_N^{Nil} noch den Operator

$$(7.5) \quad -\frac{\hbar^2}{2M} [\mathcal{L}_R] + V_R(\mathcal{L}_R),$$

der sich aus dem Hantelhamiltonoperator durch Weglassen des $\vec{L}_R^2$ -Terms ergibt. Die Eigenfunktionen des Operators (7.5) sind deshalb die Eigenfunktionen des Hantelhamiltonoperators zu $L_R=0$. Wir schreiben sie abkürzend in der Form:

$$Q_{n_R; L_R=0}(\mathcal{L}_R) \stackrel{\text{Def}}{=} Q_{n_R}(\mathcal{L}_R).$$

Wegen (5.36) haben sie die Eigenschaft:

$$(7.6) \quad \int_0^\infty Q_{n_R}(\mathcal{L}_R) Q_{n'_R}(\mathcal{L}_R) \mathcal{L}_R^2 d\mathcal{L}_R = \delta_{n_R; n'_R},$$

d.h. sie bilden ein Orthonormalsystem. Der zu Q_{n_R} gehörige Eigenwert ist nach (5.38):

$$(7.7) \quad E_{n_R} = \hbar \sqrt{\frac{8B}{M}} \left[n_R + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2MA}{\hbar^2}} \right].$$

Nun können wir daran gehen, die gemeinsamen Eigenfunktionen der Operatoren $\vec{H}_O$, $\vec{J}^2$, J_z , P und E_R zu suchen. Da sich $\vec{H}_O$ additiv aus dem Operator (7.5) und den Nilssonoperatoren H_P^{Nil} und H_N^{Nil} zusammensetzt, bilden wir als Ausgangspunkt Produkte

$$(7.8) \quad Q_{n_R}(g_R) |\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle ,$$

wobei $|\Omega_P; N_P; w_P\rangle$ und $|\Omega_N; N_N; w_N\rangle$ Nilssonfunktionen für Proton und Neutron sind. Da die Nilssonpotentiale V_P^{Nil} und V_N^{Nil} fest mit dem ξ - η - ζ -System verbunden und axialsymmetrisch bezüglich der ζ -Achse sind, treten in diesen Nilssonfunktionen die Polarkoordinaten $g_{P,u,0}$ bzw. $g_{N,v,\delta}$ von Proton und Neutron im ξ - η - ζ -System auf und die ζ -Achse ist die Quantisierungsachse:

$$(7.9)$$

$$|\Omega_P; N_P; w_P\rangle = \sum_{L_P; \Sigma_P} \Omega_P; N_P; w_P \quad R_{n_P; L_P}(g_P) \cdot \\ \cdot \sqrt{2\pi} \cdot Y_{L_P; \Omega_P - \Sigma_P}(u, 0) |\Sigma_P\rangle ;$$

$$|\Omega_N; N_N; w_N\rangle = \sum_{L_N; \Sigma_N} \Omega_N; N_N; w_N \quad R_{n_N; L_N}(g_N) \cdot \\ \cdot Y_{L_N; \Omega_N - \Sigma_N}(v, \delta) |\Sigma_N\rangle .$$

Wie bei Nilsson sind N_P und N_N die Oszillatorhauptquantenzahlen mit

$$N_P = 2n_P + L_P; \quad N_N = 2n_N + L_N.$$

Die Quantenzahl w numeriert jeweils verschiedene Nilssonfunktionen $|\Omega, N, w\rangle$ zu gleichen Werten Ω und N durch und für die Nilssonkoeffizienten gilt wie üblich:

$$(7.10) \quad N_{L; \Sigma}^{\Omega; N; w} = N_{L; -\Sigma}^{-\Omega; N; w}.$$

Sie können aus Tabellen von Nilsson berechnet werden.

Die Produkte (7.8) spannen noch nicht den Raum der Eigenfunktionen von H auf, da sie noch nicht die Eulerschen Winkel α, β, γ enthalten. Deshalb fügen wir noch je eine normierte Kreiseigenfunktion hinzu und bilden:

$$(7.11) \quad |J, M, n_R, \Omega_P, \Omega_N, N_P, N_N, w_P, w_N\rangle = Q_{n_R}(\vartheta_R) \cdot$$

$$\cdot |\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} D_{M; \Omega_P + \Omega_N}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Dieses Funktionensystem besteht nun aus orthonormierten Funktionen und spannt den Raum der Eigenfunktionen von H auf. Außerdem sind die Funktionen (7.11) Eigenfunktionen der folgenden Operatoren:

(a) des Operators (7.5), wobei gilt (vgl.(7.7)):

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} [\vartheta_R] + V_R(\vartheta_R) \right] |J, M, n_R, \Omega_P, \Omega_N, \dots\rangle = E_{n_R} |J, M, n_R, \Omega_P, \Omega_N, \dots\rangle$$

(b) des Operators H_N^{Nil} , der nur auf die Funktionen $|\Omega_N; N_N; w_N\rangle$ wirkt (vgl.(7.9)):

$$H_N^{\text{Nil}} |\Omega_N; N_N; w_N\rangle = E_N^{\text{Nil}} |\Omega_N; N_N; w_N\rangle ;$$

Diese Eigenwertgleichung besteht deshalb, weil H_N^{Nil} und $|\Omega_N; N_N; w_N\rangle$ mathematisch die gleiche Gestalt wie der bei Nilsson auftretende Hamiltonoperator bzw. dessen Eigenfunktionen besitzen. Die Eigenwerte E_N^{Nil} können also von Nilsson übernommen werden;

(c) des Operators H_P^{Nil} mit

$$H_P^{Nil} |J, M, n_R, \Omega_P, \Omega_N, \dots\rangle = E_P^{Nil} |J, M, n_R, \dots\rangle$$

(d) des Operators $\bar{H}_O$, der in (7.3) definiert wurde. Aus (a), (b) und (c) folgt für die zugehörige Eigenwertgleichung:

$$(7.12) \quad \bar{H}_O |J, M, n_R, \Omega_P, \Omega_N, N_P, N_N, w_P, w_N\rangle = (E_{n_R} + E_N^{Nil} + E_P^{Nil}) |J, M, n_R, \Omega_P, \Omega_N, N_P, N_N, w_P, w_N\rangle.$$

Es ist noch die Behauptung (c) zu beweisen. Sie ist deshalb nicht ohne weiteres einzusehen, weil in H_P^{Nil} der Operator $\hat{L}_P$ auftritt, welcher Ableitungen nach u , γ und δ enthält, d.h. H_P^{Nil} wirkt nicht nur auf $|\Omega_P; N_P; w_P\rangle$, sondern auch auf $|\Omega_N; N_N; w_N\rangle$ und auf die Funktionen $D_{M;K}^J$. Wir wollen untersuchen, in welcher Weise und schreiben dazu den Operator H_P^{Nil} in der Form:

(7.13)

$$H_P^{Nil} = -\frac{\hbar^2}{2m} [\mathfrak{P}_P]^2 + \frac{m}{2} \bar{\omega}^2 \mathfrak{P}_P^2 - m \bar{\omega}^2 \mathfrak{P}_P^2 \bar{E} \gamma_{20}(u, 0) +$$

Mit

$$\frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s} \right) \left[Y_{L_N; \Omega_N - \Sigma_N}(\nu, \delta) |\Sigma_P\rangle |\Sigma_N\rangle D_{M;K}^{J*} \right] =$$

$$= \hbar \wedge_P \left[\begin{array}{ccccc} & & & & \end{array} \right]$$

und (6.11) erhalten wir :

(7.15)

$$\vec{L}_P^2 |\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle D_{M;K}^{J*} = \left[\sum_{L_P; \Sigma_P} N_{L_P; \Sigma_P}^{\Omega_P; N_P; w_P} \right.$$

$$\left. R_{n_P; L_P} \hbar^2 L_P(L_P+1) \sqrt{2\pi} Y_{L_P; \wedge_P} |\Sigma_P\rangle \right] |\Omega_N; N_N; w_N\rangle D_{M;K}^{J*}$$

Die Wirkung von $\vec{L}_P^2$ auf (7.14) hat also insgesamt ergeben, daß die Neutronen-Nilssonfunktion und die Funktion $D_{M;K}^{J*}$ unverändert bleiben und daß aus $|\Omega_P; N_P; w_P\rangle$ der bei (7.15) in eckigen Klammern stehende Ausdruck wird. Den entsprechenden Ausdruck erhält aber auch Nilsson, wenn er seinen "regulären" Drehimpulsoperator

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

auf die Nilssonfunktion

$$|\Omega; N; w\rangle = \sum_{L; \epsilon} N_{L; \epsilon}^{\Omega; N; w} R_{n; L}(r) Y_{L; \Omega - \epsilon}(\vartheta, \varphi) |\epsilon\rangle$$

wirken läßt.

Wie bei $\vec{L}_P^2$, so läßt sich auch bei den anderen in H_P^{Nil} auftretenden Operatoren L_{P+} , L_{P-} und L_{P3} zeigen, daß sie auf (7.14) angewendet schließlich analoge Ausdrücke wie bei Nilsson liefern. Man benötigt hierzu die Beziehungen

(7.16)

$$L_{P+}(\Lambda_P) Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0) = \sqrt{(L_P - \Lambda_P)(L_P + \Lambda_P + 1)} Y_{L_P; \Lambda_P + 1};$$

$$L_{P-}(\Lambda_P) Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0) = \sqrt{(L_P + \Lambda_P)(L_P - \Lambda_P + 1)} Y_{L_P; \Lambda_P - 1};$$

$$L_{P3}(\Lambda_P) = \Lambda_P,$$

welche aus den entsprechenden Gleichungen für die Funktion $Y_{L_P; \Lambda_P}(u, \gamma)$ leicht abzuleiten sind.

Zusammenfassung:

Läßt man in

$$H_P^{Nil} |\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle D_{M; \Omega_P + \Omega_N}^{J*}$$

zunächst die Ableitungen nach γ und δ wirken, dann bekommen die entstehenden Ausdrücke eine äquivalente Gestalt wie bei Nilsson und es muß dementsprechend auch gelten:

$$H_P^{Nil} |\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle D_{M; K}^{J*} =$$

$$= E_P^{Nil} |\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle \cdot D_{M;K}^{J*},$$

wobei die Eigenwerte E_P^{Nil} die bei Nilsson angegebenen sind.

Wir haben damit gezeigt, daß in (7.11) ein Orthornormalsystem zur Verfügung steht, welches den Raum der Eigenfunktionen von H aufspannt und welches außerdem aus Eigenfunktionen des Operators $\bar{H}_0$ besteht. Wir prüfen nun noch nach, wie die mit H vertauschbaren Operatoren P , E_R und $\vec{J}^2$ auf die Bestandteile dieser Funktionen wirken (vgl. (7.9) u. (7.11)).

(a) Zur Paritätsoperation P

(7.17)

$$P Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0) = (-1)^{\Lambda_P} Y_{L_P; -\Lambda_P}(u, 0);$$

$$P Y_{L_N; \Lambda_N}(v, \delta) = (-1)^{\Lambda_N} Y_{L_N; -\Lambda_N}(v, \delta);$$

$$P D_{M;K}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{J+2M+K} D_{M;-K}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma);$$

$$P |\Sigma\rangle = (-1)^{\frac{1}{2} - \Sigma} |-\Sigma\rangle.$$

Daraus folgt für die Nilssonfunktionen:

(7.18)

$$P |\Omega_P; N_P; w_P\rangle = (-1)^{\Omega_P - \frac{1}{2}} |-\Omega_P; N_P; w_P\rangle;$$

$$P|\Omega_N; N_N; w_N\rangle = (-1)^{\Omega_N - \frac{1}{2}} |-\Omega_N; N_N; w_N\rangle.$$

Also gilt die Beziehung:

(7.19)

$$\begin{aligned} P|\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle D_{M; \Omega_P + \Omega_N}^{J*} = \\ = (-1)^{J+1} |-\Omega_P; N_P; w_P\rangle |-\Omega_N; N_N; w_N\rangle D_{M; -\Omega_P - \Omega_N}^{J*}. \end{aligned}$$

(b) Zur Operation E_R

(7.20)

$$E_R Y_{L_P; \Lambda_P}(u, 0) = (-1)^{L_P} Y_{L_P; -\Lambda_P}(u, 0);$$

$$E_R Y_{L_N; \Lambda_N}(v, \delta) = (-1)^{L_N} Y_{L_N; -\Lambda_N}(v, \delta);$$

$$E_R D_{M; K}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^J D_{M; -K}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma);$$

$$E_R |\Sigma\rangle = (-1)^{\frac{-1}{2}} |-\Sigma\rangle.$$

Bei Anwendung von E_R auf die Nilssonfunktionen muß man berücksichtigen:

(7.21)

$$(-1)^{L_P} = (-1)^{N_P}; \quad (-1)^{L_N} = (-1)^{N_N}.$$

Daraus folgt:

(7.22)

$$E_R |\Omega_P; N_P; w_P\rangle = (-1)^{N_P - \frac{1}{2}} |-\Omega_P; N_P; w_P\rangle ;$$

$$E_R |\Omega_N; N_N; w_N\rangle = (-1)^{N_N - \frac{1}{2}} |-\Omega_N; N_N; w_N\rangle ;$$

$$\begin{aligned} E_R |\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle \cdot D_{M; \Omega_P + \Omega_N}^{J*} \\ = (-1)^{J+N_P+N_N+1} |-\Omega_P; N_P; w_P\rangle |-\Omega_N; N_N; w_N\rangle D_{M; -\Omega_P - \Omega_N}^{J*}. \end{aligned}$$

(c) Zu $\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2$

Wir untersuchen nun die Wirkung der Operatoren

$$J_3 = L_3 + S_{P3} + S_{N3} ;$$

$$J_+ = L_+ + S_{P+} + S_{N+} ;$$

$$J_- = L_- + S_{P-} + S_{N-}$$

auf die Nilssonfunktionen $|\Omega_P; N_P; w_P\rangle$ und $|\Omega_N; N_N; w_N\rangle$. Wir können uns dabei auf die in diesen Nilssonfunktionen auftretenden Spinoren $|\Sigma_P\rangle$ und $|\Sigma_N\rangle$ beschränken, da die obigen Operatoren keine Ableitungen nach den Variablen g_P, g_N, u, v und δ enthalten. Man findet:

(7.23)

$$J_3 |\Sigma_P\rangle = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial}{\partial \delta} \right) \left[\sum_{\zeta_P} D_{\zeta_P}^{\frac{1}{2}} |\zeta_P\rangle \right] + S_{P3} |\Sigma_P\rangle +$$

$$+ S_{N_3} |\Sigma_P\rangle = -\hbar \Sigma_P |\Sigma_P\rangle + \hbar \Sigma_P |\Sigma_P\rangle + 0 = 0.$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$L_+ D_{\Sigma_P; \Sigma_P}^{\frac{1}{2}} = -\hbar \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \Sigma_P\right)\left(\frac{1}{2} + \Sigma_P + 1\right)} D_{\Sigma_P; \Sigma_P+1}^{\frac{1}{2}};$$

$$L_- D_{\Sigma_P; \Sigma_P}^{\frac{1}{2}} = -\hbar \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \Sigma_P\right)\left(\frac{1}{2} - \Sigma_P + 1\right)} D_{\Sigma_P; \Sigma_P-1}^{\frac{1}{2}};$$

kann man die Wirkung von J_+ und J_- auf $|\Sigma_P\rangle$ ermitteln:

(7.24)

$$\begin{aligned} J_+ |\Sigma_P\rangle &= L_+ |\Sigma_P\rangle + S_{P+} |\Sigma_P\rangle + S_{N+} |\Sigma_P\rangle = \\ &= -\hbar |\Sigma_P\rangle \delta_{\Sigma_P; -\frac{1}{2}} + \hbar |\Sigma_P\rangle \delta_{\Sigma_P; -\frac{1}{2}} + 0 = 0; \end{aligned}$$

Analog findet man:

(7.25)

$$J_- |\Sigma_P\rangle = 0;$$

$$J_+ |\Sigma_N\rangle = 0;$$

$$J_- |\Sigma_N\rangle = 0;$$

$$J_3 |\Sigma_N\rangle = 0.$$

Damit wird:

$$\underline{(7.26)} \quad \vec{J}^2 |\Omega_{P; N_P; w_P}\rangle = 0; \quad \vec{J}^2 |\Omega_{N; N_N; w_N}\rangle = 0;$$

$$\begin{aligned} & \hat{J}^2 \left[|\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle D_{M; \Omega_P + \Omega_N}^{J*} \right] = \\ & \hbar^2 J(J+1) \left[|\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle D_{M; \Omega_P + \Omega_N}^{J*} \right]. \end{aligned}$$

Auf Grund der Ergebnisse von (a), (b) und (c) können wir nun ein normiertes System von Funktionen angeben, welche Eigenfunktionen zu den Operatoren

$$\hat{J}^2, J_z, P, E_R, \bar{H}_0$$

sind, nämlich:

(7.27)

$$\begin{aligned} & |J, M, n_R, N_P, w_P, N_N, w_N, |\Omega_P|, |\Omega_N|, |\Omega_P + \Omega_N|, \epsilon_R \rangle = \\ & Q_{n_R}(\vartheta_R) \frac{\sqrt{2J+1}}{4\pi} \left[D_{M; \Omega_P + \Omega_N}^{J*} |\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle + \right. \\ & \left. + \epsilon_R (-1)^{J+1+N_P+N_N} D_{M; -\Omega_P - \Omega_N}^{J*} |-\Omega_P; N_P; w_P\rangle |-\Omega_N; N_N; w_N\rangle \right]. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte dieser Funktionen zu den Operatoren P und E_R sind

$$\pi = (-1)^{N_P + N_N} \text{ bzw. } \epsilon_R.$$

Über ϵ_R ist in diesem Zusammenhang keine neue Aussage möglich. Wir kennen jedoch aus (5.16) die Beziehung

$$\epsilon_R = (-1)^{L_R}$$

und da L_R als Drehimpuls eines gg-Kerns laut Experi-

ment nur geradzahlig sein kann, müssen wir also stets Funktionen zu $\epsilon_R=+1$ verwenden.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die zu $\epsilon_R=1$ gehörigen Funktionen

(7.28)

$$Q_{n_R}(\mathfrak{g}_R) \frac{\sqrt{2J+1}}{4\pi} \left[D_{M; \Omega_P + \Omega_N}^{J*} |\Omega_P; N_P; w_P\rangle |\Omega_N; N_N; w_N\rangle + \right. \\ \left. + (-1)^{J+1+N_P+N_N} D_{M; -\Omega_P - \Omega_N}^{J*} |-\Omega_P; N_P; w_P\rangle |-\Omega_N; N_N; w_N\rangle \right]$$

bei der Ersetzung

$$\Omega_P \longrightarrow -\Omega_P; \quad \Omega_N \longrightarrow -\Omega_N$$

sich nur mit einem Phasenfaktor multiplizieren. Deshalb wählen wir im folgenden stets $\Omega_P > 0$.

Wenn wir die Eigenfunktionen $|E, J, M, \pi, \epsilon_R=1\rangle$ unseres uu-Kern-Hamiltonoperators H und der mit ihm vertauschbaren Operatoren $\hat{J}^2, J_z, P$ und E_R nach den Funktionen (7.28) entwickeln, haben wir dabei über alle Vibrationsniveaus (d.h. über $n_R=0, 1, 2, \dots$) zu summieren sowie über diejenigen Nilsson-niveaus $(\Omega_P; N_P; w_P)$ und $(\Omega_N; N_N; w_N)$ mit

$$(a) \quad (-1)^{N_P+N_N} = \pi;$$

$$(b) \quad \Omega_P > 0 \text{ und } 0 \leq |\Omega_P + \Omega_N| \leq J.$$

Bei einer völlig exakten Rechnung wäre - wie es hier angegeben ist - über unendlich viele Vibrations- und Nilsson-niveaus zu summieren. Interessiert man sich aber nur für niedrige Anregungszustände des uu-Kerns, dann kann man bei der Summation in guter Näherung die hohen Vibrations- und Nilsson-niveaus weglassen, d.h. man kommt mit einer endlichen Summe aus.

VIII. Das Rumpfspektrum

Zum vorliegenden uu-Kern-Modell haben wir im bisherigen Verlauf die funktionale Gestalt des Hamiltonoperators H (vgl.(4.21)) und den endgültigen Ansatz für seine Eigenfunktionen (vgl.Kap.VII) aufgestellt. Allerdings enthält H eine Reihe von Größen, die noch festgelegt werden müssen:

- (a) die Parameter A und B des Hantelpotentials $V_R(g_R)$ (vgl.(3.7));
- (b) die Funktion $\beta(g_R)$, die einen Zusammenhang zwischen der Deformation des schwingenden Nils-sonpotentials und der Hantellänge herstellen soll;
- (c) die Stärke V_0 der Restwechselwirkung V_{PN} (vgl.(3.4)) und der darin enthaltene Anteil an Spin-Spin-Wechselwirkung - beschrieben durch den Parameter $\bar{\alpha}$.

Die Diskussion bzw. zahlenmäßige Bestimmung dieser Größen soll schrittweise so erfolgen, daß wir zunächst (in diesem Kapitel) mit dem gg-Rumpf beginnen und uns dabei nur mit dem Punkt (a) befassen. Anschließend gehen wir dann zum ug- bzw. gu-Kern über, wozu vorher Punkt (b) zu klären ist. Punkt (c) schließlich wird erst bei der Anwendung des Modells auf uu-Kerne von Bedeutung.

Beginnen wir also mit dem gg-Rumpf, der in unserem Modell durch eine schwingende Hantel mit dem Potential (vgl.(3.7))

$$(8.1) \quad v_R(g_R) = \frac{A}{g_R^2} + B g_R^2 \quad (A > 0; B > 0)$$

und dem daraus resultierenden Spektrum (vgl. (5.38))

$$(8.2) \quad E_{n_R; L_R} = \hbar \sqrt{\frac{8B}{M}} \left[n_R + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{L_R(L_R+1) + \frac{1}{4} + \frac{2MA}{\hbar^2}} \right]$$

$$(n_R=0,1,2,\dots; L_R=0,2,4,\dots;)$$

beschrieben wird. Um die Form der Energieformel (8.2) zu vereinfachen, führen wir die Abkürzungen

$$(8.3) \quad \Delta E_R = \hbar \sqrt{\frac{8B}{M}} \quad \text{und} \quad Q = \frac{1}{4} + \frac{2MA}{\hbar^2}$$

ein und erhalten dann:

$$(8.4) \quad E_{n_R; L_R} = \Delta E_R \left[n_R + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{L_R(L_R+1) + Q} \right]$$

$$(n_R=0,1,2,\dots; L_R=0,2,4,\dots; \Delta E_R > 0; Q > \frac{1}{4}).$$

Wir ersehen aus (8.4), daß sich im Hantelspektrum zu jedem (positiven und ganzzahligen) Wert von n_R eine noch durch $L_R=0,2,\dots$ klassifizierte Energieleiter aufbaut. Jede solche Leiter wird im folgenden als " L_R -Leiter" bezeichnet. Die unterste L_R -Leiter baut auf dem Grundzustand ($n_R=0, L_R=0$) auf und umfaßt die

Energien zu ($n_R=0, L_R=0, 2, 4, \dots$). Von hier aus gelangen wir zu den höheren L_R -Leitern, indem wir n_R schrittweise um 1 erhöhen, wobei jedesmal die Energie ΔE_R addiert wird. Das Hantelspektrum besteht also aus kongruenten L_R -Leitern, die äquidistant angeordnet sind (vgl. Abb. 5).

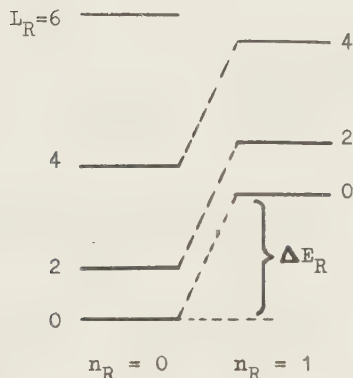


Abbildung 5

Der niederenergetische Teil des Hantelspektrums (schematisch)

Nachdem wir die allgemeine Form des Hantelspektrums kennen, interessiert uns noch, wie eine Veränderung der Potentialparameter A und B (bzw. ΔE_R und Q) sich darin bemerkbar macht.

Was den Parameter ΔE_R betrifft, so hat er im Hantelspektrum zwei Bedeutungen. Einerseits gibt er - wie wir gesehen haben - direkt die Energieabstände benachbarter L_R -Leitern an. Andererseits zeigt (8.4), daß die Hantelenergien proportional zu ΔE_R sind, d.h. ΔE_R spielt auch die Rolle eines "Streckungsfaktors" -

eine Veränderung von ΔE_R bewirkt somit eine ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung des gesamten Hantelspektrums.

Wenden wir uns nun dem Parameter Q (bzw. A) zu. Er geht zwar nicht in die Abstände der L_R -Leitern ein (die durch ΔE_R gegeben sind), jedoch in deren Struktur. Wir betrachten hierzu zunächst die beiden Grenzfälle $Q = \frac{1}{4}$ und $Q \rightarrow \infty$.

(a) $Q = \frac{1}{4}$ (d.h. $A = 0$):

Hier bleibt im Hantelpotential $V_R(g_R)$ nur der Oszillatorterm stehen. Wir erhalten deshalb aus (8.4) die Energieformel für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator:

$$(8.5) \quad E_{n_R; L_R} = \frac{\Delta E_R}{2} \left[2n_R + L_R + \frac{3}{2} \right] \quad (\text{für } Q = \frac{1}{4}).$$

Zu vorgegebener Quantenzahl n_R gehört hier eine äquidistante L_R -Leiter.

(b) $Q \rightarrow \infty$ (d.h. $A \rightarrow \infty$):

Bei diesem Grenzübergang können wir in (8.4) die Wurzel

$$\sqrt{L_R(L_R+1) + Q}$$

nach Potenzen von $\frac{L_R(L_R+1)}{Q}$ entwickeln. Bezeichnen wir noch die Energie des Grundzustands ($n_R=0, L_R=0$) mit $E_{0;0}$, so erhalten wir aus (8.4):

$$(8.6) \quad E_{n_R; L_R} - E_{0;0} = n_R \cdot \Delta E_R + \frac{\Delta E_R}{4\sqrt{Q}} L_R(L_R+1) + \dots$$

Denken wir daran, daß wir sehen wollten, wie sich die Struktur der L_R -Leitern für $Q \rightarrow \infty$ verhält! Da diese Struktur nicht vom Parameter ΔE_R beeinflußt wird, können wir diesen ohne weiteres zusammen mit Q verändern - und zwar lassen wir ΔE_R mit Q so gegen Unendlich streben, daß $\Delta E_R / \sqrt{Q}$ fest bleibt. Dabei verschiebt sich das Minimum des Potentials V_R etwas. Man überzeugt sich leicht, daß dann in der obigen Reihenentwicklung nur der in $L_R(L_R+1)$ lineare Term übrig bleibt. Wegen $\Delta E_R \rightarrow \infty$ bleiben außerdem nur die Zustände zu $n_R=0$ im Bereich endlicher Anregungsenergien. Insgesamt erhalten wir also aus (8.6):

$$(8.7) \quad E_{n_R=0; L_R} - E_{0;0} = \frac{\Delta E_R}{4\sqrt{Q}} L_R(L_R+1) \\ (\text{für } \Delta E_R \rightarrow \infty; Q \rightarrow \infty; \Delta E_R / \sqrt{Q} \text{ fest}).$$

Der Grenzübergang (b) hat uns also das Spektrum eines starren Rotators mit dem Trägheitsmoment Θ_0 geliefert, wobei gilt:

$$(8.8) \quad \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} = \frac{\Delta E_R}{4\sqrt{Q}}.$$

Für das Hantelpotential $V_R(g_R)$ bedeutet dieser Grenz-

übergang, daß der Hantelabstand $g_R = g_{\text{MIN}}$, bei dem V_R minimal wird, gegen einen endlichen Wert g_0 konvergiert. Es ist:

$$(8.9) \quad g_{\text{MIN}} = \sqrt[4]{\frac{A}{B}} = \frac{\hbar}{\sqrt{M}} \sqrt[4]{\frac{4Q-1}{\Delta E_R^2}}, \quad \text{also}$$

$$g_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{M}} \sqrt[4]{\frac{4Q}{\Delta E_R^2}}.$$

Zwischen g_0 und θ_0 besteht die Beziehung:

$$(8.10) \quad \theta_0 = M g_0^2.$$

Die beiden Grenzfälle (a) und (b) haben uns gezeigt, wie sich die Gestalt der L_R -Leitern ändert, wenn wir den Parameter Q von $\frac{1}{4}$ auf sehr große Werte anwachsen lassen. Es findet mit zunehmenden Werten von Q ein Übergang von äquidistanten Oszillatorniveaus zum exakten $L(L+1)$ -Spektrum eines starren Rotators statt.

Werfen wir einen Blick auf die experimentellen Spektren deformierter gg -Kerne, so stellen wir fest, daß sie mit einer $(0^+, 2^+, 4^+, \dots)$ -Grundzustandsbande beginnen, die mit der untersten L_R -Leiter des Hantelspektrums zu identifizieren wäre. Anfänge höherer $(0^+, 2^+, 4^+, \dots)$ -Banden wurden bei manchen gg -Kernen ebenfalls gemessen.

Die Form der (experimentellen) Grundzustandsbanden

folgt selten dem exakten $L(L+1)$ -Gesetz, besonders nicht bei leichteren gg-Kernen. Abweichungen vom $L(L+1)$ -Gesetz lassen sich deuten, wenn man annimmt, daß das Trägheitsmoment Θ mit wachsendem Drehimpuls L_R langsam zunimmt (Zentrifugalstreckung). Genau diesen Effekt kann das Hantelmodell für große Q -Werte wiedergeben. Für

$$Q \gg L_R(L_R+1)$$

sind wir einerseits so weit vom Oszillator ($Q=\frac{1}{4}$) entfernt, daß bereits näherungsweise das $L(L+1)$ -Gesetz gilt - andererseits rotiert die Hantel für endliche Q -Werte noch nicht starr, d.h. $\Theta = \Theta(L_R)$.

Um die Zentrifugalstreckung in der untersten L_R -Leiter des Hantelspektrums ($n_R=0$) sichtbar zu machen, schreiben wir nochmals die Energien dieser Leiter auf:

$$(8.11) \quad E(L_R) = \Delta E_R \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{L_R(L_R+1) + Q} \right]$$

Mit Hilfe dieser Formel berechnen wir zu jedem Drehimpuls L_R ein "effektives Trägheitsmoment" $\Theta(L_R)$ durch

$$(8.12) \quad \frac{dE(L_R)}{d[L_R(L_R+1)]} \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\hbar^2}{2 \Theta(L_R)},$$

in Analogie zum starren Rotator, wo wir aus

$$E(L) = \frac{\hbar^2}{2 \Theta_{\text{STARR}}} L(L+1)$$

den entsprechenden Ausdruck

$$\frac{dE(L)}{d[L(L+1)]} = \frac{\hbar^2}{2\Theta_{\text{STARR}}}$$

erhalten. Mit (8.11) und (8.12) bekommen wir dann für $\Theta(L_R)$:

$$(8.13) \quad \frac{\hbar^2}{2\Theta(L_R)} = \frac{\Delta E_R}{4\sqrt{L_R(L_R+1)+Q}}.$$

Da wir $Q \gg L_R(L_R+1)$ vorausgesetzt haben, können wir in (8.13) die Wurzel nach Potenzen von

$$\frac{L_R(L_R+1)}{Q}$$

entwickeln und bekommen:

$$(8.14) \quad \frac{\hbar^2}{2\Theta(L_R)} = \frac{\Delta E_R}{4\sqrt{Q}} \left[1 - \frac{L_R(L_R+1)}{2Q} + \dots \right]$$

Wir sehen aus (8.14), daß $\Theta(L_R)$ mit L_R zunimmt, und zwar umso schwächer, je größer der Parameter Q ist, je starrer also die Hantel rotiert. Für $L_R=0$ erhalten wir aus (8.14) ein effektives Trägheitsmoment $\Theta(0)$, das mit dem in (8.8) auftretenden Θ_0 übereinstimmt.

Den Ausdruck (8.13) bekommt man übrigens auch, indem man den Erwartungswert des Operators

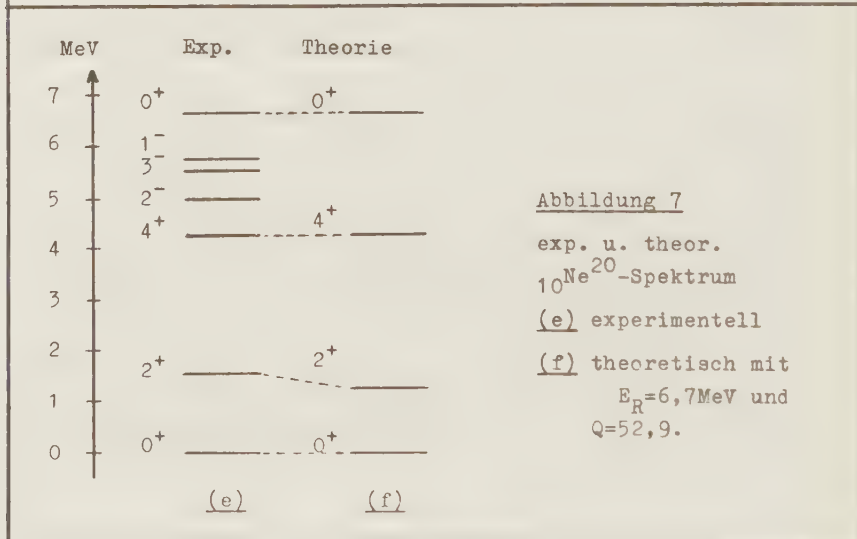
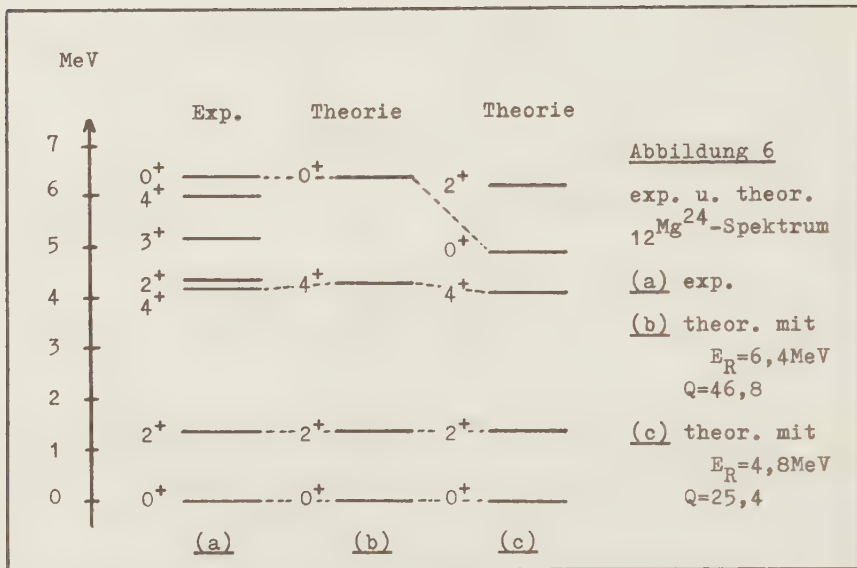
$$\frac{\hbar^2}{2Mg_R^2}$$

im betreffenden stationären Hantelzustand ($n_R=0, L_R$) ausrechnet und dazu die in (5.37) angegebenen Wellenfunktionen verwendet:

$$(8,15) \quad \langle n_R=0; L_R | \frac{\hbar^2}{2Mg_R^2} | n_R=0; L_R \rangle = \frac{\hbar^2}{2\Theta(L_R)} .$$

Abschließend noch zwei Beispiele zur Anpassung des Hantelspektrums an ein gegebenes gg-Kern-Spektrum. Da wir zwei Parameter zur Verfügung haben, können wir zwei Energieabstände anpassen, beispielsweise in der Grundzustandsbande die Abstände ($0^+, 2^+$) und ($0^+, 4^+$), oder anstelle von ($0^+, 4^+$) den Abstand des ersten angeregten 0^+ -Zustands vom 0^+ -Grundzustand. Beide Vorschläge sind in Abbildung 6 an $^{12}\text{Mg}^{24}$ illustriert. Das theoretische Spektrum zeigt in jedem Fall nur sog. β -Schwingungsbanden mit den Niveaus $0^+, 2^+, 4^+$, usw., da wir von einem Gebilde ausgegangen sind, das nur axialsymmetrisch schwingen kann. Demgegenüber finden wir im experimentellen Spektrum noch eine ($2^+, 3^+, 4^+$)-Bande, die man in der Literatur entweder durch nicht-axialsymmetrische γ -Schwingungen [9] oder mit Hilfe eines dreiaxialen Rotators deutet [10] .

Bei einem weiteren Beispiel - $^{10}\text{Ne}^{20}$ - beginnt das experimentelle Spektrum ebenfalls mit $0^+, 2^+, 4^+$. Paßt man hierzu die Abstände ($0^+, 2^+$) und ($0^+, 4^+$) an, dann



liegt im Hantelspektrum zwischen dem (2^+) - und (4^+) -Zustand bereits der $(n_R=1)-0^+$ -Zustand, d.h. es beginnt im Gegensatz zum experimentellen $_{10}\text{Ne}^{20}$ -Spektrum mit 0^+ , 2^+ , 0^+ , 4^+ . Wir wählen deshalb eine andere Anpassung (vgl. Abb.7), indem wir jeweils die Anregungsenergie des ersten (4^+) - und des zweiten (0^+) -Zustands an das experimentelle Spektrum angleichen.

Das theoretische Hantelspektrum kann dann - vom 0^+ -Grundzustand beginnend - die $_{10}\text{Ne}^{20}$ -Zustände 0^+ , 2^+ , 4^+ , 0^+ deuten, während es die experimentell auftretenden Zustände negativer Parität nicht wiedergibt. Dies liegt daran, daß wir die beiden Hantelmassen als Bosonen behandelt haben und dadurch nur Zustände mit geradzahligen Drehimpulsen und positiver Parität erhielten.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß - bei $_{12}\text{Mg}^{24}$ wie bei $_{10}\text{Ne}^{20}$ - die Zustände, welche das Hantelmodell nicht erklären kann - oberhalb von 4 MeV liegen. Wenn wir später das vorliegende uu-Kern-Modell anwenden, werden wir jedoch Anregungsenergien betrachten, die keinesfalls über 4 MeV liegen. Der Grund hierfür ist, daß die Paarungsenergie bei 2-3 MeV liegt und daß in unserem uu-Kern-Modell das Aufbrechen von Nukleonenpaaren aus dem Rumpf nicht beschrieben werden kann.

IX. Die Ankopplung der Nilssonpotentiale an die
schwingende Hantel

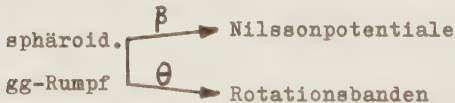
Bei der Verwendung von Nilssonpotentialen im Rahmen des "kollektiven Kernmodells" geht man üblicherweise davon aus, daß die Oberfläche des zugrundeliegenden gg -Rumpfes Äquipotentialfläche ist. Dies hat zur Folge, daß man sich den Rumpf (näherungsweise) als Sphäroid mit der Oberfläche

$$(9.1) \quad R(\vartheta) = R_0 \left[1 + \beta Y_{20}(\vartheta, 0) \right]$$

R_0 Kernradius; β Deformation

vorzustellen hat. Dieses Sphäroid muß dann auch zur Erklärung des Rumpfspektrums herangezogen werden. Etwa die Grundzustandsrotationsbande eines gg -Kerns kann mit Rotationen des Sphäroids um eine Achse gedeutet werden, welche durch seinen Schwerpunkt geht und auf seiner Symmetrieachse senkrecht steht (vgl. Abb.1). Die Form des Rotationsspektrums hängt dann nur vom Trägheitsmoment $\Theta_{\text{Sph.}}$ des Sphäroids bzgl. dieser Drehachse ab, wobei im Falle eines "weichen" Sphäroids $\Theta_{\text{Sph.}} = \Theta_{\text{Sph.}}(L_R)$ gelten wird.

Wir halten also fest: die Deformation β des sphäroidischen gg -Rumpfs geht in die von ihm erzeugten Nilssonpotentiale ein, sein Trägheitsmoment $\Theta_{\text{Sph.}}$ bestimmt die Form seiner Rotationsbanden.



Von hier aus läßt sich ein Zusammenhang mit der Hantel herstellen. Denn in Kapitel VIII haben wir gesehen, daß man den niederenergetischen Teil des gg-Rumpf-Spektrums wenigstens teilweise bekommt, wenn man statt des Sphäroids eine Hantel nimmt, welche gleiche Symmetrie wie das Sphäroid besitzt und um eine entsprechende Achse wie dieses rotiert. Damit Hantel und Sphäroid gleiche Rotationsanregungen liefern, muß dann gelten:

$$(9.2) \quad \left\langle \frac{1}{\theta_{\text{Sph.}}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\theta_{\text{Hantel}}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{M \mathcal{S}_R^2} \right\rangle .$$

Wie wir aus Kapitel VIII wissen, läßt sich (9.2) im niederenergetischen Bereich durch passende Wahl des Hantelpotentials $V_R(\mathcal{S}_R)$ erfüllen. Dabei wird aber noch kein Bezug zwischen der schwingenden Hantel und den schwingenden Nilssonpotentialen hergestellt, da ja $\mathcal{S}$ in (9.2) überhaupt nicht auftritt.

Diesem Bezug wenden wir uns nun zu und gehen dabei zunächst wieder von sphäroidischen gg-Kernen aus. Wir nehmen an, wir hätten eine fundamentale Beziehung $\mathcal{S}(\theta_{\text{Sph.}})$ zur Verfügung, die uns angibt, wie bei einem weichen sphäroidischen gg-Kern die momentane Deformation $\mathcal{S}$ mit dem momentanen Trägheitsmoment $\theta_{\text{Sph.}}$ zusammenhängt. Dann könnten wir - da in unserem Modell die Hantel an die Stelle des Sphäroids tritt - verlangen, daß diese Beziehung auch zwischen dem momentanen Trägheitsmoment

$$(9.3) \quad \theta_{\text{Hantel}} = M \mathcal{S}_R^2$$

der Hantel und der momentanen Deformation β der anzukoppelnden Nilssonpotentiale bestehen soll. Wir hätten damit gleichzeitig eine geometrische Verknüpfung $\beta(g_R)$ zwischen der momentanen Potentialdeformation β und der momentanen Hantellänge g_R gefunden. Ebendiese Funktion $\beta(g_R)$ würde dann die in diesem Kapitel angestrebte Ankopplung der Nilssonpotentiale an die schwingende Hantel beschreiben.

Vergessen wir nicht, daß diese Überlegungen auf der Annahme aufbauten, daß wir wissen, wie bei einem sphäroidischen gg-Kern die Größen β und Θ voneinander abhängen. Ein Blick in die Literatur zeigt uns aber, daß es bzgl. dieses Zusammenhangs noch keine Theorie gibt. Allerdings finden sich dort verschiedene empirische Ansätze, die wir uns anschließend ansehen werden. Sie stützen sich jedoch notwendigerweise auf die experimentellen Daten v e r s c h i e d e n e r gg-Kerne. Die grundlegende Annahme, die wir dann im folgenden einführen, besteht darin, daß der betreffende Zusammenhang $\beta(\Theta)$ auch innerhalb ein und desselben gg-Kerns als gültig angesehen werden darf. Weiterhin machen wir die Annahme, daß der zunächst aus Mittelwerten von β und Θ abgeleitete empirische $\beta(\Theta)$ -Ansatz auch die Momentanwerte dieser Größen in einem (weichen) gg-Kern verknüpft, sodaß bei der Anwendung auf das Hantelmodell der Ausdruck (9.3) in diese Beziehung $\beta(\Theta)$ eingesetzt werden darf.

Wir kommen nun zu der Frage, welche Versuche bereits unternommen wurden, um einen empirischen Zusammenhang $\beta(\Theta)$ für verschiedene gg-Kerne zu finden. Dabei ist zu bedenken, daß man stattdessen auch nach einer Beziehung

$Q_0(\theta)$ suchen kann, wobei Q_0 das innere Quadrupolmoment des betreffenden Korns ist. Im Falle eines sphäroidischen Korns mit homogener Ladungsverteilung (und der Protonenzahl Z) ist Q_0 folgendermaßen mit der Deformation β verknüpft [30] :

$$(9.4) \quad Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z \cdot R_0^2 (\beta + 0,36 \beta^2 + \dots)$$

Wichtige Vorarbeiten zur Ableitung eines Zusammenhangs $Q_0=f(\theta)$ wurden im Jahre 1962 von L. G R O D - Z I N S [11] durchgeführt. Durch Auswertung eines umfangreichen experimentellen Materials, das sich auf (sphärische und deformierte) gg-Kerne nahezu des gesamten Massenbereichs erstreckte ($12 \leq A \leq 244$), fand er zwischen der Übergangswahrscheinlichkeit $T_{\gamma}(E2; 2^+ \rightarrow 0^+)$ und der Energie $E(2^+)$ den empirischen Zusammenhang:

$$(9.5) \quad T_{\gamma}(E2; 2^+ \rightarrow 0^+) \propto [E(2^+)]^4 \cdot Z^2 A^{-1}.$$

Zu dieser ziemlich allgemein gültigen Beziehung werden dann zwei weitere Überlegungen hinzugefügt:

(a) die Übergangswahrscheinlichkeit $T_{\gamma}(E2; 2^+ \rightarrow 0^+)$ läßt sich theoretisch mit dem inneren Quadrupolmoment Q_0 verknüpfen [12] :

$$(9.6) \quad T_{\gamma}(E2; 2^+ \rightarrow 0^+) \propto [E(2^+)]^5 \cdot Q_0^2$$

(b) weiterhin kann man bei gg-Kernen, welche eine Grund-

zustandsrotationsbande besitzen, der Energie $E(2^+)$ theoretisch ein Trägheitsmoment Θ zuordnen:

$$(9.7) \quad E(2^+) = \frac{6 \cancel{\hbar}^2}{2 \Theta} =_{\text{Def}} \frac{3}{g} \quad (\text{mit } g = \Theta / \cancel{\hbar}^2).$$

Aus (9.5), (9.6) und (9.7) ergibt sich dann für deformierte gg-Kerne der Zusammenhang:

$$(9.8) \quad Q_0^2 \propto g \quad \text{bzw.} \quad |Q_0| = C_0 \sqrt{g}.$$

Da diese Beziehung (9.8) teils aus empirischen Untersuchungen, teils mit theoretischen Überlegungen abgeleitet wurde, muß sie unbedingt noch experimentell nachgeprüft werden. Für schwere deformierte gg-Kerne mit $A \geq 126$ wurde dies bereits im Jahre 1968 von G. S C H A R F F - G O L D H A B E R durchgeführt [13]. Für 49 Kerne berechnete sie $|Q_0|$ nach (9.6) aus $T_g(E2; 2^+ \rightarrow 0^+)$, sowie g aus der jeweiligen Grundzustandsrotationsbande und fand, daß tatsächlich der Quotient

$$(9.9) \quad \frac{|Q_0|}{\sqrt{g}} = C_0$$

näherungsweise eine Konstante mit dem Wert

$$(9.10) \quad C_0 = (39,4 \pm 2,6) \cdot 10^2 \text{ fm}^2 \text{ KeV}^{1/2}$$

ergab.

Eine experimentell sich andeutende Abhängigkeit der Konstanten C_0 vom Atomgewicht A versuchten im Jahre 1970 V A R S H N I und B O S E [14] durch einen Ansatz der Form

$$(9.11) \quad C_0 = K_0 \cdot A^{1/4} \quad \text{mit} \quad K_0 = 10,5 \cdot 10^2 \text{fm}^2 \text{KeV}^{1/2}$$

zu erfassen, wobei sie den Zusammenhang $|Q_0| = C_0 \sqrt{g}$ bei denselben gg -Kernen wie Scharff-Goldhaber ($A \gg 126$) untersuchten. Das Ergebnis von Varshni und Bose besagt, daß (zumindest im Bereich $A \gg 126$) der Quotient

$$C_0 = \frac{|Q_0|}{\sqrt{g}}$$

mit der Massenzahl A abnimmt. Da wir unser Modell im Bereich sehr viel kleinerer Atomgewichte anwenden wollen, werden wir auf dieses Ergebnis Rücksicht nehmen müssen.

Die beiden oben zitierten Arbeiten untersuchten die Beziehung $|Q_0| = C_0 \sqrt{g}$ bei schweren deformierten gg -Kernen. Da sich - wie bereits gesagt - unser Modell jedoch auf leichte Kerne ($20 \leq A \leq 30$) beziehen soll, müssen wir noch nachprüfen, ob dieser Zusammenhang zwischen Q_0 und g auch hier gilt, und wenn ja, mit welcher Konstanten C_0 . Da der betrachtete Massenbereich klein ist, soll in diesem keine A-Abhängigkeit von C_0 berücksichtigt werden.

In der folgenden Tabelle sind diejenigen gg -Kerne

mit 20 $\leq A \leq 30$ zusammengestellt, die auf die gleiche Weise wie bei Scharff-Goldhaber untersucht wurden. In der ersten Spalte sind zu jedem Kern die Literaturstellen beigelegt, aus denen die Q_0 -Werte bzw. die Übergangswahrscheinlichkeiten T_y entnommen wurden. Bildet man damit für jeden Kern einen Mittelwert $|Q_0|_{\text{Mittel}}$ und dividiert diesen durch $\sqrt{g}$, so erhält man die in der zweiten Spalte angegebenen Größen $C_0 = |Q_0|_{\text{Mittel}} / \sqrt{g}$. Mit Ausnahme von $^{10}\text{Ne}^{22}$ streuen diese C_0 -Werte nur wenig um den mittleren Wert

$$(9.12) \quad C_0 = 11,7 \cdot 10^2 \text{fm}^2 \text{KeV}^{1/2}.$$

T A B E L L E

gg-Kerne u. Literatur	$C_0 = \frac{ Q_0 _{\text{Mittel}}}{\sqrt{g}}$
$^{10}\text{Ne}^{20}$ [15,16,17]	$12,0 \cdot 10^2 \text{fm}^2 \text{KeV}^{1/2}$
$^{10}\text{Ne}^{22}$ [17,18,19]	$8,8 \cdot 10^2 \text{fm}^2 \text{KeV}^{1/2}$
$^{12}\text{Mg}^{24}$ [15,16,20]	$12,7 \cdot 10^2 \text{fm}^2 \text{KeV}^{1/2}$
$^{12}\text{Mg}^{26}$ [20,21]	$12,3 \cdot 10^2 \text{fm}^2 \text{KeV}^{1/2}$
$^{14}\text{Si}^{28}$ [15,16]	$11,9 \cdot 10^2 \text{fm}^2 \text{KeV}^{1/2}$
$^{14}\text{Si}^{30}$ [22,23]	$12,4 \cdot 10^2 \text{fm}^2 \text{KeV}^{1/2}$

Wie die Tabelle zeigt, ist im Massenbereich $20 \leq A \leq 30$ der mittlere Wert von

$$C_0 = \frac{|Q_0|}{\sqrt{g}}$$

wesentlich kleiner als der, den Scharff-Goldhaber für $A \geq 126$ fand (vgl. (9.10)). Diesen Effekt, daß zu kleineren Massenzahlen A auch kleinere C_0 -Werte gehören, hatten ja Varshni und Bose bereits vorausgesagt. Doch weist unser Ergebnis darauf hin, daß C_0 noch stärker von A abhängt als es dort angenommen wurde.

Damit ist das Hauptproblem dieses Kapitels gelöst. Wir haben nun einen empirischen Zusammenhang $Q_0 = f(\Theta)$ für leichte gg -Kerne, in dem wir nach (9.4) die Größe Q_0 durch β ausdrücken können. Wie zu Beginn dieses Kapitels vorausgesagt, wollen die daraus entstehende Beziehung $\beta(\Theta)$ auf die momentanen Größen β und Θ eines einzelnen weichen gg -Kerns anwenden, sodaß wir hier für Θ das momentane Hantelträgheitsmoment $\Theta = M g_R^2$ einsetzen können. Wir erhalten dann durch Auflösen nach β den gesuchten $\beta(g_R)$ -Zusammenhang:

$$(9.13) \quad \beta(g_R) = \frac{1}{0,72} \left[\sqrt{1 + F_0 g_R} - 1 \right] \quad \text{mit}$$

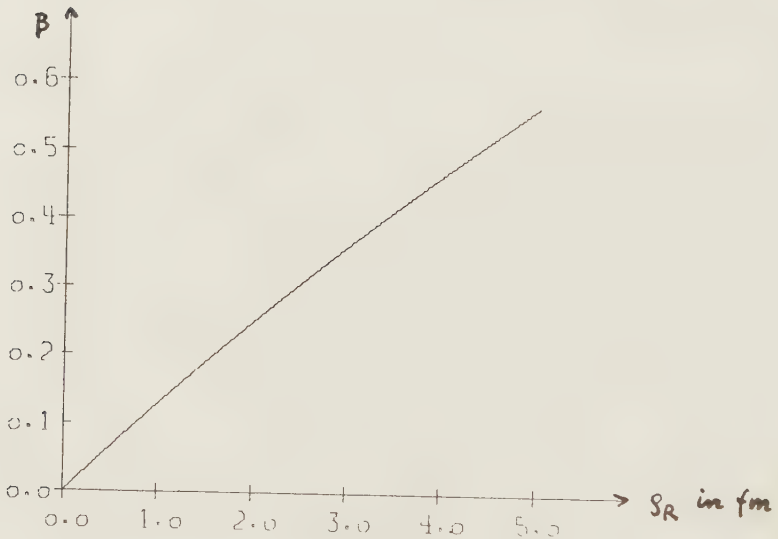
$$F_0 = C_0 \cdot \frac{0,48 \sqrt{5 \pi M}}{Z \cdot R_0^2}$$

($4M$ =Masse des gg -Kerns; Z =Protonenzahl;
 R_0 =Kernradius)

Die Funktion $\beta(g_R)$ ist in Abbildung 8 für den gg -Kern $^{12}\text{Mg}^{24}$ skizziert.

Abbildung 8

Abhängigkeit der Deformation β von
der Hantellänge g_R für $^{12}\text{Mg}^{24}$



Da der Zusammenhang von β und g_R nahezu linear ist, können wir in den Nilsson-Hamiltonoperatoren H_P^{Nil} und H_N^{Nil} für $\beta(g_R)$ einen Näherungsausdruck der Form

$$(9.14) \quad B(g_R) = \bar{B} + K_0 \left(\frac{g_R - \bar{g}}{\bar{g}} \right)$$

verwenden. Hier ist $\bar{g}$ eine mittlere Hantellänge und $\bar{B}$ ist die zugehörige mittlere Deformation: $\bar{B} = B(\bar{g})$. Wir erhalten (9.14), indem wir die ursprüngliche Funktion $B(g_R)$ an einer Stelle $g_R = \bar{g}$ bis zur ersten Ordnung in eine Taylorreihe entwickeln. Zu vorgegebenem $\bar{g}$ ist dann K_0 eindeutig bestimmt und von der Größenordnung $\bar{B}$:

$$(9.15) \quad K_0 = \bar{B} \frac{1 + 0,36 \bar{B}}{1 + 0,72 \bar{B}} \quad \text{mit} \quad \bar{B} = B(\bar{g}).$$

Im Rahmen unseres Modells hängt in den Nilssonpotentialen neben B auch die Oszillatorfrequenz ω von g_R ab. Der Grund hierfür ist, daß im Nilssonmodell wegen der "Volumenkonstanz" des Rumpfes eine Beziehung zwischen ω und B besteht. Für ω^2 verwenden wir den Näherungsausdruck (vgl.(3.8) u. (3.9)):

$$(9.16) \quad \omega^2 = \left(\frac{41}{\hbar A^{1/3}} \right)^2 \left(1 - \frac{15}{4\pi} B^2 - \frac{5}{4\pi} \sqrt{\frac{5}{\pi}} B^3 \right)^{-1/3}$$

$$\approx \left(\frac{41}{\hbar A^{1/3}} \right)^2 \left(1 + \frac{5}{4\pi} B^2 + \frac{5}{12\pi} \sqrt{\frac{5}{\pi}} B^3 \right)$$

Wenn wir in diesen Ausdruck für ω^2 die Funktion $B(g_R)$ aus (9.14) einsetzen, dann erhalten wir ω^2 als Funktion von g_R und kennen dann alle g_R -abhängigen Größen in den schwingenden Nilssonpotentialen.

X. Der Einfluß der Rumpfschwingung auf das Spektrum
von ug- bzw. gu-Kernen, diskutiert anhand der
Matrizelemente des Hamiltonoperators

In Kapitel VIII haben wir einen Teil des vorliegenden uu-Kern-Modells, nämlich die schwingende und rotierende Hantel, auf deformierte gg-Kerne angewendet. Es zeigte sich, daß die Hantel das niederenergetische Spektrum solcher Kerne (bei $_{10}\text{Ne}^{20}$ und $_{12}\text{Mg}^{24}$ im Bereich 0-4MeV), insbesondere deren "Zentrifugalstreckung" befriedigend wiedergeben konnte. Das nächste Problem war eine physikalisch sinnvolle Ankopplung eines schwingenden Nilssonpotentials an die schwingende Hantel, was in Kapitel IX diskutiert wurde.

Nach diesen Vorbereitungen können wir als nächsten Schritt in dieses Nilssonpotential ein Proton oder Neutron setzen, also ein ug- bzw. gu-Kern-Modell mit axialsymmetrisch schwingendem Rumpf herstellen. Speziell mit $_{10}\text{Ne}^{20}$ als gg-Rumpf soll dieses Modell im folgenden Kapitel auf die Kerne $_{10}\text{Ne}^{21}$ und $_{11}\text{Na}^{21}$ angewendet werden. Als weitere Anwendung fügen wir dann noch zum $_{10}\text{Ne}^{20}$ -Rumpf zwei Außennukleonen - ein Proton und ein Neutron - hinzu und beschreiben den uu-Kern $_{11}\text{Na}^{22}$.

Als ersten Schritt in diesem Programm befassen wir uns mit dem ug-Kern-Hamiltonoperator H_{ug} und seinen Eigenfunktionen. Wir erhalten H_{ug} , indem wir aus dem uu-Kern-Hamiltonoperator (4.21) sämtliche Neutronenterme wegstreichen:

$$(10.1) \quad H_{ug} = H_0 + H_1 + H_2 \quad \text{mit}$$

$$H_0 = - \frac{\hbar^2}{2M} [\mathfrak{g}_R] + v_R(\mathfrak{g}_R) + H_P^{Nil}(\vec{\omega}, \vec{B})$$

$$H_1 = \frac{m}{2} (\omega^2 - \vec{\omega}^2) \mathfrak{g}_P^2 - m(\omega^2 \beta - \vec{\omega}^2 \vec{\beta}) \mathfrak{g}_P^2 Y_{20}(u, 0)$$

$$H_2 = \frac{\vec{L}_R^2}{2M \mathfrak{g}_R^2} = \frac{(\vec{J} - \vec{J}_P)^2}{2M \mathfrak{g}_R^2};$$

($\vec{J}$ = Gesamtdrehimpuls; $\vec{L}_R$ = Rumpfdrehimpuls;
 $\vec{J}_P$ = Teilchendrehimpuls)

Die sich hier anschließenden Überlegungen bzgl. der Symmetrien des Operators H_{ug} , des Ansatzes für seine Eigenfunktionen usw. sind völlig analog denen, die wir bereits ausführlich für den entsprechenden uu-Kern-Hamiltonoperator (4.21) durchgeführt haben. Sie sollen deshalb nur kurz gestreift werden.

So sind auch hier die Operatoren

$$H_{ug}, \vec{J}^2, J_z, P \text{ und } E_R$$

(P = Paritätsoperator; E_R vertauscht die Handmassen)

wieder paarweise vertauschbar. Sie besitzen also ein System gemeinsamer Eigenfunktionen, die sich in der Form

$$|E, J, M, \pi, t_R\rangle$$

klassifizieren lassen, wobei

$$E, \hbar^2 J(J+1), \hbar M, \pi \text{ und } \epsilon_R$$

die Eigenwerte der oben genannten Operatoren sind. Wir beschränken uns wieder auf geradzahlige Rumpfdrehimpulse, betrachten also wegen (5.16) nur ug-Kern-Zustände $|E, J, M, \pi, \epsilon_R\rangle$ zu $\epsilon_R = +1$.

Die stationären Zustände $|E, J, M, \pi, \epsilon_R = +1\rangle$ zu H_{ug} entwickeln wir nach Funktionen, die sich durch folgende Quantenzahlen klassifizieren lassen:

(a) $J, M, \pi, \epsilon_R = 1$

(b) die Schwingungsquantenzahl n_R

(c) die Quantenzahlen $|\Omega_P|, N_P, w_P$, welche ein Einteilchen-Nilsson-Niveau festlegen, wobei N_P die Oszillatorhauptquantenzahl, $\hbar \Omega_P$ die Projektion des Teilchendrehimpulses $\vec{J}_P$ auf die Rumpfachse ist und w_P verschiedene Nilsson-zustände zu gleichen Quantenzahlen N_P und $|\Omega_P|$ unterscheiden soll.

Diese Entwicklungsfunktionen mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) schreiben wir in der Form $|J, M, \epsilon_R = 1, n_R, |\Omega_P|, N_P, w_P\rangle$. Sie haben eine entsprechende Gestalt wie beim uu-Kern-Modell und lauten (vgl. (7.28)):

$$\begin{aligned} (10.2) \quad & |J, M, \pi, \epsilon_R = 1, n_R, |\Omega_P|, N_P, w_P\rangle = \\ & = Q_{n_R} (g_R)^{-\frac{\sqrt{2J+1}}{4\pi}} \left[D_{M; \Omega_P}^{J*} |\Omega_P, N_P, w_P\rangle + \right. \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{N_P + J - \frac{1}{2}} D_{M; -N_P}^{J*} | -N_P, N_P, w_P \rangle]$$

$(Q_{n_R}(g_R))$ = Hantel-Radialfunktion für $L_R=0$ (vgl. (7.6)),
 $|(N_P), N_P, w_P \rangle$ = Nilssonfunktion (vgl. (7.9))

Wie bereits erwähnt, sind diese Entwicklungsfunktionen (10.2) Eigenfunktionen der Operatoren $\vec{J}^2$, J_z , P und E_R . Dies beweist man leicht mit Hilfe der Beziehungen (7.17), (7.18), (7.20), (7.22) und (7.28). Insbesondere findet man dabei den im Nilssonmodell üblichen Zusammenhang:

$$(10.3) \quad \pi = (-1)^{N_P}.$$

Daneben sind die Entwicklungsfunktionen (10.2) aber auch Eigenfunktionen des Operators

$$- \frac{\hbar^2}{2M} [g_R] + V_R(g_R)$$

und des Nilsson-Hamiltonoperators $H_P^{\text{Nil}}(\bar{\omega}, \bar{g})$ zu fester Deformation $\bar{g}$ und fester Oszillatorfrequenz $\bar{\omega}$. Der erste Operator ist der Hantel-Hamiltonoperator ohne den $\vec{L}_R^2$ -Term - er beschreibt also die schwingende Hantel in den Zuständen $L_R^2=0$. Die zugehörigen Eigenwerte sind:

$$(10.4) \quad E_{0;0} + n_R \cdot \Delta E_R$$

($E_{0;0}$ = Grundzustandsenergie der Hantel)

Die Energien (10.4) bilden das äquidistante Schwingungsspektrum der ($L_R=0$)-Hantelzustände, das wir aus Kapitel VIII kennen.

Die Eigenwerte der Entwicklungsfunktionen (10.2) bzgl. des anderen Operators H_P^{Nil} sind die üblichen Nilssonenergien $E_P^{Nil}(|\Omega_P|, N_P, w_P)$.

Fassen wir kurz zusammen! Wir haben uns ursprünglich in (10.1) einen Modell-Hamiltonoperator für ug-Kerne vorgegeben und ihn in die Teile H_0, H_1 und H_2 zerlegt. Weiterhin haben wir für seine speziell klassifizierten Eigenfunktionen die Entwicklungsfunktionen (10.2) konstruiert. Nun können wir mit diesen Entwicklungsfunktionen die Matrixelemente von H_0, H_1, H_2 ausrechnen und diskutieren.

Beginnen wir mit dem Operator H_0 :

$$H_0 = - \frac{\hbar^2}{2M} [\mathfrak{g}_R] + V_R(\mathfrak{g}_R) + H_P^{Nil}(\bar{\omega}, \bar{E}).$$

Wie wir oben gesehen haben, sind die Entwicklungsfunktionen (10.2) Eigenfunktionen von H_0 zu den Eigenwerten:

$$(10.5) \quad (E_{0;0} + n_R \Delta E_R) + E_P^{Nil}(|\Omega_P|, N_P, w_P).$$

Der Operator H_0 beschreibt offensichtlich eine schwingende Hantel in den Zuständen ($n_R=0, 1, \dots; L_R=0$) und - davon völlig entkoppelt - die Bewegung eines Teilchens in einem raumfesten und starrten Nilssonpotential. Durch Hinzunahme von H_1 erfolgt dann die Kopplung von Hantelschwingung und Einteilchenbewegung, während H_2

die Rotation des Rumpfes und des mit ihm verbundenen Nilssonpotentials beschreibt.

Wir betrachten zunächst die Matrixelemente des Operators

$$H_1 = \frac{m}{2}(\omega^2 - \bar{\omega}^2) \mathfrak{g}_P^2 - m(\omega^2 \beta - \bar{\omega}^2 \bar{\beta}) \mathfrak{g}_P^2 Y_{20}(u, 0) \quad \text{mit}$$

$$\omega = \omega(\mathfrak{g}_R); \quad \beta = \beta(\mathfrak{g}_R).$$

Sie sind in (10.6) angegeben. Dabei werden die Quantenzahlen $J, M, \pi, \epsilon_R, N_P$ als fest betrachtet und nur durch Punkte angedeutet. Außerdem wird die Hantel-Radialfunktion $Q_{n_R}(\mathfrak{g}_R)$ mit $|n_R\rangle$ abgekürzt:

$$\begin{aligned} (10.6) \quad & \langle \dots, n_R', | \Omega_P', w_P' | H_1 | w_P, | \Omega_P, n_R, \dots \rangle = \\ & = \frac{1}{2} \mathfrak{g}_P \bar{\omega} \langle n_R' | \frac{\omega^2(\mathfrak{g}_R)}{\bar{\omega}^2} - 1 | n_R \rangle \cdot (N_P + \frac{3}{2}) \cdot \delta_{\Omega_P'; \Omega_P} \delta_{w_P'; w_P} - \\ & - \mathfrak{g}_P \bar{\omega} \bar{\beta} \langle n_R' | \frac{\omega^2(\mathfrak{g}_R) \beta(\mathfrak{g}_R)}{\bar{\omega}^2 \bar{\beta}} - 1 | n_R \rangle \cdot \\ & \cdot \delta_{\Omega_P'; \Omega_P} \langle N_P, \Omega_P', w_P' | \mathfrak{g}_P^2 Y_{20}(u, 0) | N_P, \Omega_P, w_P \rangle. \end{aligned}$$

Die Matrixelemente (10.6) zeigen 3 Eigenschaften der Kopplung von Hantelschwingung und Einteilchenbewegung.

(a) die Matrixelemente (10.6) enthalten den Faktor

" $\delta_{\Omega_P'; \Omega_P}$ ". Deshalb erhält diese Kopplung die Projektion $\mathfrak{g}_P$ des Teilchendrehimpulses $\vec{j}_P$

auf die Symmetrieachse des Nilssonpotentials. Der physikalische Grund hierfür ist, daß das Nilssonpotential axialsymmetrisch schwingt.

- (b) die Matrixelemente von H_1 koppeln Zustände zu verschiedenen Quantenzahlen n_R
- (c) sie sind unabhängig vom Gesamtdrehimpuls J (obwohl sie mit J -abhängigen Wellenfunktionen (10.2) gebildet wurden). Auf diese Tatsache kommen wir später zurück.

Nun haben wir noch die Matrixelemente des Operators

$$H_2 = \frac{\vec{L}_R^2}{2M g_R^2}$$

zu bilden, der die Rotation des Rumpfes mit variablem Trägheitsmoment " $M g_R^2$ " beschreibt. Wir zerlegen H_2 in einen g_R -abhängigen und einen g_R -unabhängigen Teil:

$$H_2 = \left(\frac{\hbar^2}{2M g_R^2} \right) \left(\frac{L_R^2}{\hbar^2} \right).$$

Dasselbe ist mit den Wellenfunktionen (10.2) möglich, mit denen wir die Matrixelemente von H_2 ausrechnen wollen.

Betrachten wir zunächst die Matrixelemente von $\hbar^2/2M g_R^2$, gebildet mit dem g_R -abhängigen Anteil $Q_{n_R}(g_R) = |n_R\rangle$ der Funktion (10.2)! Wir stellen durch Nachrechnen fest, daß die Diagonalelemente

$$\langle n_R | \frac{\hbar^2}{2M g_R^2} | n_R \rangle = \int_0^\infty \frac{\hbar^2}{2M g_R^2} Q_{n_R}^2(g_R) g_R^2 dg_R$$

nicht von n_R abhängen. Bei vorgegebenen Parametern ΔE_R und Q des Hantelpotentials haben sie vielmehr den konstanten Wert:

$$(10.7) \quad \langle n_R | \frac{\hbar^2}{2M g_R^2} | n_R \rangle = \frac{\Delta E_R}{4\sqrt{Q}}.$$

Diese Diagonalelemente (10.7) entsprechen einem konstanten Rumpfträgheitsmoment θ_0 mit

$$(10.8) \quad \frac{\hbar^2}{2\theta_0} = \langle n_R | \frac{\hbar^2}{2M g_R^2} | n_R \rangle.$$

Mit anderen Worten: die Zentrifugalstreckung des Rumpfes wird nur von den Nicht-Diagonalelementen

$$\langle n_R' | \frac{\hbar^2}{2M g_R^2} | n_R \rangle \quad \text{mit} \quad n_R' \neq n_R$$

wiedergegeben. Wenn wir also bei späteren Anwendungen des ug-Kern-Modells die Zentrifugalstreckung berücksichtigen wollen, dann müssen wir Entwicklungsfunktionen (10.2) zu mehr als einem n_R -Wert verwenden.

Das Trägheitsmoment θ_0 ist uns übrigens schon in

Kapitel VIII bei der Entwicklung der Hantelenergien $E_{n_R; L_R}$ nach Potenzen von $L_R(L_R+1)$ begegnet (vgl.(8.6)):

$$E_{n_R; L_R} = E_{0;0} + n_R \Delta E_R + \frac{\hbar^2}{2 \theta_0} L_R(L_R+1) + \dots$$

Betrachten wir jetzt die Matrixelemente des $\mathcal{G}_R$ -unabhängigen Operators $\vec{L}_R^2 / \hbar^2$, die wir mit dem $\mathcal{G}_R$ -unabhängigen Teil der Entwicklungsfunktionen (10.2)

$$(10.9) \quad \frac{\sqrt{2J+1}}{4\pi} \left[D_{M; \Omega_P}^{J*} |\Omega_P, N_P, w_P\rangle + (-1)^{J+N_P-\frac{1}{2}} D_{M; -\Omega_P}^{J*} |-\Omega_P, N_P, w_P\rangle \right]$$

berechnen. Wir formen hierzu obigen Operator durch die Beziehungen

$$\vec{L}_R^2 = (\vec{J} - \vec{j}_P)^2; \quad L_{R3} = 0$$

um und erhalten:

$$\frac{\vec{L}_R^2}{\hbar^2} = \frac{1}{\hbar^2} (\vec{J}^2 + \vec{j}_P^2 - 2 \vec{j}_P \cdot \vec{J} - J_+ j_{P-} - J_- j_{P+})$$

Hierin wirken die Operatoren $\vec{J}^2$, J_+ und J_- nur auf die Funktionen $D_{M; \Omega_P}^{J*}$ aus (10.9) und die Operatoren $\vec{j}_P^2$, j_{P3} , j_{P+} und j_{P-} nur auf die Nilssonfunktionen $|N_P, \Omega_P, w_P\rangle$. Mit den Nilssonfunktionen bilden wir - wie Nilsson - nur Matrixelemente zu fester Oszilla-

torhauptquantenzahl N_P . Außerdem verwenden wir im folgenden die Abkürzung

$$\sqrt{(a+b)(a-b+1)} =_{\text{Def}} [a, b] .$$

In der Diagonale des Operators $\vec{L}_R^2 / \hbar^2$ stehen dann die Elemente:

$$\begin{aligned} (10.10) \quad & \left\langle \frac{\vec{L}_R^2}{\hbar^2} \right\rangle = \\ & = J(J+1) - 2\Omega_P^2 + \langle \Omega_P, N_P, w_P | \vec{J}_P^2 | \Omega_P, N_P, w_P \rangle + \\ & + (-1)^{J+N_P+\frac{1}{2}} \delta_{\Omega_P, \frac{1}{2}} [J, \Omega_P] \langle \Omega_P, N_P, w_P | J_{P+} | -\Omega_P, N_P, w_P \rangle \end{aligned}$$

Die Diagonalelemente (10.10) liefern zu jedem Einteilchen-Nilssonzustand mit $\Omega_P \neq \frac{1}{2}$ eine exakt $J(J+1)$ -abhängige Rotationsbande. Für $\Omega_P = \frac{1}{2}$ spielt jedoch in (10.10) noch der in der dritten Zeile stehende Term eine Rolle, der die exakte $J(J+1)$ -Abhängigkeit der $(\Omega_P = \frac{1}{2})$ -Bande zerstört.

Bevor wir uns den noch fehlenden Nicht-Diagonalelementen des Operators $\vec{L}_R^2 / \hbar^2$ zuwenden, betrachten wir nochmals die bereits berechneten Matrixelemente und fragen, welche Art Energiespektrum wir bei einer Diagonalisierung der Matrizen H_0 bzw. $H_0 + (H_2)_{\text{Diag.}}$ bzw. $H_0 + (H_2)_{\text{Diag.}} + H_1$ erwarten. H_0 ist diagonal und liefert zu jeder der äquidistanten (zu $n_R = 0, 1, \dots$ gehörigen) Hantel-Schwingungsniveaus eine Leiter von Einteilchen-

Nilssonenergien $E_P^{\text{Nil}}(|\Omega_P|)$. Durch Hinzunahme von $(H_2)_{\text{diag.}}$ kommt dann zu jedem durch n_R und $|\Omega_P|$ klassifizierten Niveau noch eine Rotationsbande mit

$$J = |\Omega_P|, |\Omega_P| + 1, |\Omega_P| + 2, \dots$$

und festem Trägheitsmoment Θ_0 (vgl. (10.8)). Die Matrixelemente von H_1 schließlich können, da sie den Faktor $\delta_{\Omega_P, ; \Omega_P}$ enthalten, nur Rotationsbanden zu

gleicher Projektionsquantenzahl $|\Omega_P|$ (und verschiedener Schwingungsquantenzahl n_R) koppeln. Dabei ist vor allem wichtig, daß die Matrixelemente von H_1 unabhängig vom Gesamtdrehimpuls J sind. Letzteres hat aber zur Folge, daß die durch H_1 beschriebene Schwingung des Nilssonpotentials alle Mitglieder einer Rotationsbande in gleicher Weise beeinflußt, was nur zu einer Verschiebung der Bande als Ganzes führen kann. Die Frage ist, was man mit diesem Effekt anfangen kann. Bevor wir diese Frage beantworten, sollten wir sämtliche Matrixelemente von H_{ug} kennen, also auch die noch ausstehenden Nicht-Diagonalelemente von $\vec{L}_R^2 / \hbar^2$. Diese berechnen wir mit den Funktionen (10.9), wobei $(\Omega_P'; N_P; w_P')$ und $(\Omega_P; N_P; w_P)$ die Quantenzahlen verschiedener Nilssonzustände bedeuten sollen. Wir erhalten dann für die Nicht-Diagonalelemente von $\vec{L}_R^2 / \hbar^2$ den Ausdruck:

$$(10.11) \quad \delta_{\Omega_P', ; \Omega_P} \langle \Omega_P' ; N_P ; w_P' | \vec{J}_P^2 | \Omega_P ; N_P ; w_P \rangle -$$

$$- \delta_{\Omega_P', ; \Omega_P - 1} [J, \Omega_P] \langle \Omega_P' ; N_P ; w_P' | J_P - |\Omega_P ; N_P ; w_P \rangle -$$

$$- \delta_{\Omega_P'; \Omega_P+1} [J, -\Omega_P] \langle \Omega_P'; N_P; w_P' | J_{P+} | \Omega_P; N_P; w_P \rangle.$$

Diese 3 Terme beschreiben eine Kopplung von Rotationsbanden, welche sich auf verschiedenen Einteilchennilssoniveaus aufbauen mit

$$(a) \quad |\Omega_P'| = |\Omega_P|;$$

$$(b) \quad |\Omega_P'| = ||\Omega_P| - 1| \quad w_P' \neq w_P$$

$$(c) \quad |\Omega_P'| = |\Omega_P| + 1$$

Die Kopplung von Rotationsbanden ist erfahrungsgemäß bei leichten deformierten Kernen am größten, da dort Einteilchenanregungen und Rotationsanregungen etwa die gleiche Energie erfordern. Eine solche Kopplung macht es aber schwer bzw. unmöglich, die Verschiebung der einzelnen Banden (unter der Wirkung von H_1) zu beobachten. Gerade bei den leichten Kernen findet man aber auch die "weichen" Kerne, bei denen ein mitschwingendes Nilssonpotential und somit H_1 überhaupt von Bedeutung sein können.

Damit kennen wir den Einfluß der Rumpfschwingung auf das ug-Kern-Spektrum - soweit er aus den Matrixelementen von H_{ug} ersichtlich ist. Eine Ergänzung hierzu soll im nächsten Kapitel erfolgen, wo wir an einem praktischen Beispiel untersuchen, wie ein Übergang vom starren zum weichen Rumpf sich im ug-Kern-Spektrum auswirkt.

XI. Die Anwendung des Modells auf den Kern $_{10}\text{Ne}^{21}$

Im vorangehenden Kapitel wurde ein ug-Kern-Modell diskutiert, mit dem im folgenden die niederenergetischen Spektren der Kerne $_{10}\text{Ne}^{21}$ und $_{11}\text{Na}^{21}$ berechnet werden sollen. Beide Kerne kann man sich in ein Außennukleon und den gg-Rumpf $_{10}\text{Ne}^{20}$ zerlegt denken. Auf diesen gemeinsamen Rumpf wendeten wir in Kapitel VIII das Modell der schwingenden und rotierenden Hantel an und wählten dazu bestimmte Werte für die Parameter A und B des Hantelpotentials $V_R(g_R)$. Diese Parameterwerte sollen zunächst nicht verändert werden, wenn zur Hantel ein Außennukleon hinzugefügt wird.

Betrachten wir nochmals kurz die Wechselwirkung zwischen Rumpf und Außennukleon. Wie bereits erwähnt, soll sie über ein Nilssonpotential erfolgen, das die Hantelachse als Symmetrieachse besitzt und in dem die Deformation β von der Hantellänge g_R abhängt:

$$(11.1) \quad V^{Nil} = \frac{m}{2} \omega^2(\beta) g^2 - m \omega^2(\beta) \cdot \beta \cdot g^2 Y_{20}(u, 0) + \\ + C \vec{S} \cdot \vec{L} + D \vec{L}^2;$$

$$\beta(g_R) = \frac{1}{0,72} \left[\sqrt{1 + \frac{0,48 \sqrt{5\pi M}}{Z \cdot R_0^2} \cdot C_0 \cdot g_R} - 1 \right]$$

($g, u, 0$ Koordinaten des Außennukleons im $\{ \eta \}$ -System;

$\vec{S}$ und $\vec{L}$ Spin- bzw. Bahndrehimpulsvektor des Außen-
nukleons; M reduzierte Rumpfmasse; Z Ordnungszahl;
 R_0 Kernradius)

Die Funktion $B(g_R)$ wurde in Kapitel IX abgeleitet
und enthält u.a. eine Konstante C_0 , die wir durch
Auswertung der Scharff-Goldhaber-Beziehung " $Q_0 = C_0 \sqrt{g}$ "
im Massenbereich $20 \leq A \leq 30$ ermittelten. Diese Aus-
wertung ergab:

$$(11.2) \quad C_0 = (11,7 \pm 5,6) \cdot 10^2 \text{ fm}^2 \text{ KeV}^{1/2},$$

wobei die hier angegebenen Fehlerbalken davon her-
rühren, daß die verwendeten experimentellen Daten
entsprechend ungenau waren.

Im Nilssonpotential (11.1) sind damit nur noch
die von der Rumpfschwingung nicht betroffenen Kon-
stanten C und D zu diskutieren. Die Stärke C der
Spin-Bahn-Wechselwirkung ist für Massenzahlen um
 $A=21$ von der Größenordnung

$$(11.3) \quad -3 \text{ MeV} < C < -2,5 \text{ MeV},$$

was aus Anwendungen des Nilssonmodells in diesem
Massenbereich hervorgeht [26,27]. Da Nilsson für
das Verhältnis D/C innerhalb jeder Oszillatorschale
einen bestimmten Wert vorgibt, ist mit C dann auch
die Konstante D im Nilssonpotential festgelegt.

Bei der Anwendung des vorliegenden Modells auf

die Kerne $^{21}_{10}\text{Ne}$ und $^{21}_{11}\text{Na}$ haben wir also keine (im üblichen Sinn) freien Parameter zur Verfügung, können aber die Werte der Parameter C_0 und C innerhalb der empirisch vorgegebenen Intervalle (11.2) und (11.3) variieren.

Die experimentellen Spektren der genannten Kerne werden an späterer Stelle abgebildet und sollen bis zu etwa 4 MeV Anregungsenergie mit den Modellvorausagen verglichen werden, da bis zu dieser Energie die Klassifikation der experimentellen Niveaus nach Gesamtdrehimpuls und Parität nahezu vollständig bekannt ist [28]. Dabei ist aber nicht zu erwarten, daß alle experimentell gefundenen Zustände dieses Bereichs auch vom Modell geliefert werden. Wenn nämlich die Anregungsenergie des ug-Kerns über der Paarungsenergie für Nukleonen (2-3 MeV) liegt, können Paare im Rumpf aufgebrochen werden. Diese Anregung des Rumpfes ist jedoch im Hantelmodell nicht vorgesehen.

Als weitere Vorbereitung zur Erstellung der theoretischen ug-Kern-Spektren erinnern wir uns kurz an das vorangehende Kapitel. Dort sahen wir, daß die durch J, M und π klassifizierten ug-Kern-Zustände nach den Funktionen (10.2)

$$Q_{n_R}(g_R) \frac{\sqrt{2J+1}}{4\pi} \left[D_{M;\Omega}^{J*} | \Omega, N, w \rangle + (-1)^{J+N-\frac{1}{2}} D_{M;-\Omega}^{J*} | -\Omega, N, w \rangle \right] \quad \text{mit} \quad \pi = (-1)^N$$

entwickelt werden. Mit diesen Funktionen sind deshalb

die Matrixelemente zum Hamiltonoperator H_{ug} zu berechnen und die Diagonalisierung der Matrix H_{ug} liefert dann das gesuchte theoretische Energiespektrum. Wir müssen uns also zunächst darüber klar werden, welche dieser Funktionen für eine theoretische Beschreibung der ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ - und ${}_{11}\text{Na}^{21}$ -Zustände im Bereich 0-4MeV verwendet werden sollen. Da in diesen Funktionen die Quantenzahlen n_R bzw. (Ω, N, w) jeweils einen bestimmten Schwingungszustand des Rumpfes bzw. einen bestimmten Einteilchen-Nilssonzustand des Außennukleons kennzeichnen, können wir auch so fragen: "Welche Schwingungszustände des Rumpfes und welche Einteilchenzustände des Außennukleons sind bei der modellmäßigen Beschreibung der genannten niederenergetischen Spektren zu berücksichtigen?"

Fangen wir mit den Schwingungszuständen des Rumpfes an und betrachten dazu das an den gg-Kern ${}_{10}\text{Ne}^{20}$ angepaßte Hantelspektrum (vgl. Abb. 7). Eine Erhöhung der Schwingungsquantenzahl n_R um 1 führt dort stets zu einem um $\Delta E_R = 6,72 \text{ MeV}$ höheren Energieniveau der Hantel. Es muß also genügen, wenn wir im folgenden nur die Hantelzustände zu den beiden kleinsten Schwingungsquantenzahlen $n_R=0$ und $n_R=1$ mitnehmen. Dagegen wäre eine Näherung, in der nur Hantelzustände zu $n_R=0$ berücksichtigt würden, zu grob, da dann die Zentrifugalstreckung des Rumpfes nicht beschrieben werden könnte (vgl. Kap. X).

Als nächstes verschaffen wir uns einen Überblick über die im folgenden zu berücksichtigenden Einteilchen-Nilssonzustände. Dabei nehmen wir an, das mittlere Nilssonpotential für das an den ${}_{10}\text{Ne}^{20}$ -Rumpf gebundene Aus-

sennukleon sei durch die mittleren Parameterwerte (vgl.(11.1))

(11.4) $B = 0,35$; $C = -2,7\text{MeV}$; (D wie bei Nilsson)

bestimmt. Beide Werte sind von sinnvoller Größenordnung: die mittlere Deformation B ist aus Streuexperimenten an ${}_{10}\text{Ne}^{20}$ entnommen [16] und $C=-2,7\text{MeV}$ ist ein mittlerer Wert aus (11.3). Zu dem in (11.4) gewählten mittleren Nilssonpotential können wir die Einteilchen-Nilssonzustände bestimmen und diese dann mit den 10 Protonen und 10 Neutronen des ${}_{10}\text{Ne}^{20}$ -Rumpfes auffüllen - pro Nilssonzustand 2 Protonen und 2 Neutronen. Die darauf folgenden freien Nilssonzustände sind dann die tiefsten Einteilchen-Zustände für das Außennukleon. Dabei erhalten wir für das Proton die gleichen Einteilchen-Zustände wie für das Neutron, da der Kern ${}_{10}\text{Ne}^{20}$ ebenso viele Protonen wie Neutronen enthält. Die untersten dieser Nilssonzustände liegen in der Oszillatorschale zu $N=2$, wozu wegen

$$\pi = (-1)^N$$

positive Parität gehört. Höhere Einteilchenanregungen führen dann in die $(N=3)$ -Schale mit Zuständen negativer Parität, usw. In Abbildung 9 sind diejenigen dieser Nilssonzustände eingezeichnet, die bei der Anwendung des Modells auf die Kerne ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ und ${}_{11}\text{Na}^{21}$ berücksichtigt werden sollen. Sie sind mit den Quantenzahlen $|\Omega|$ und π gekennzeichnet und gehören alle zur $(N=2)$ - und $(N=3)$ -Schale. Es sei aber nochmals betont, daß die in Abb.9 eingezeichneten Zustände nur eine Übersicht geben sollen und (energiemäßig) noch nicht die spätere optimale Anpassung liefern.

Energie in MeV

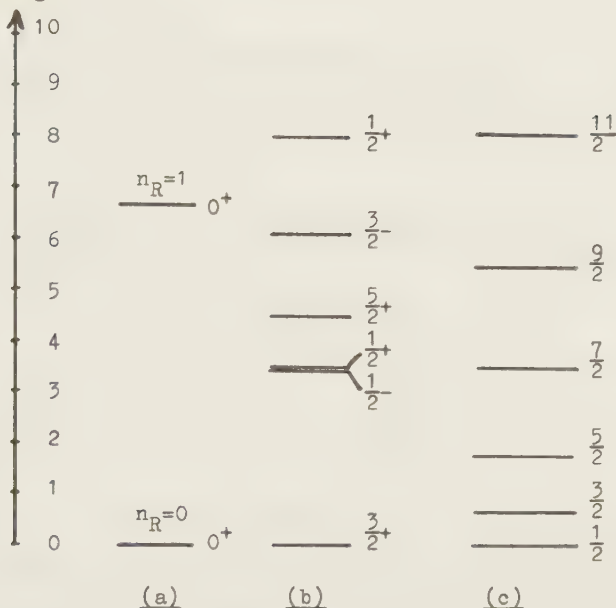


Abbildung 9:

Übersicht über die im Modell verwendeten Schwingungs-, Einteilchen- und Rotationsanregungen zur Beschreibung der Kernspektren von $^{21}_{10}\text{Ne}$ und $^{21}_{11}\text{Na}$:

(a) 0^+ -Zustände der Hantel

(b) Nilssonzustände ($|\Omega|, \pi$) zum mittleren Potential (11.4) und $A=21$

(c) schematische $J(J+1)$ -abhängige Rotationsbande zum Trägheitsmoment $\mathcal{A}^2/2\Theta_0 = 0,23\text{MeV}$, also ohne Berücksichtigung der Zentrifugalstreckung der Hantel.

Die in Abbildung 9 noch eingetragene Rotationsbande

$$(c) \quad J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$$

gehört zu einem konstanten Trägheitsmoment θ_0 , das in gleicher Weise wie schon in Kapitel X gewonnen wurde, indem die Energien $E_{n_R;L_R}$ der Hantel nach Potenzen von $L_R(L_R+1)$ entwickelt wurden:

$$\begin{aligned} E_{n_R;L_R} - E_{0;0} &= n_R \Delta E_R + \frac{\Delta E_R}{2} \left[\sqrt{L_R(L_R+1)+Q} - \sqrt{Q} \right] = \\ &= n_R \Delta E_R + \underbrace{\frac{\Delta E_R}{4\sqrt{Q}} L_R(L_R+1)}_{\text{Df}} + \dots \\ &= \text{Df} \frac{\hbar^2}{2\theta_0} \end{aligned}$$

Setzt man hier die an das $_{10}\text{Ne}^{20}$ -Spektrum angepassten Parameterwerte $\Delta E_R = 6,72 \text{ MeV}$ und $Q = 52,9$ ein, so erhält man den in Abb.9 verwendeten Wert $\hbar^2/2\theta_0 = 0,23 \text{ MeV}$, d.h. in Abb.9 wurde zum Rumpfrägheitsmoment θ_0 eine $J(J+1)$ -abhängige ug-Kern-Bande eingezeichnet.

Damit können wir die Abbildung 9 zusammenfassend betrachten: sie gibt uns einen Überblick über die Schwingungs-, Einteilchen- und Rotationsanregungen, die vom Modell her zur Beschreibung des $_{10}\text{Ne}^{21}$ - und des $_{11}\text{Na}^{21}$ -Spektrums berücksichtigt werden. Dabei zeigt sich, daß - wie es bei leichteren Kernen üblich ist - für Einteilchen- und Rotationsanregungen Energiebeträge von gleicher Größenordnung aufgewendet werden müssen, während eine Schwingungsanregung eine deutlich höhere Energie als diese beiden benötigt. Weiterhin können wir mit Hilfe von Abbildung 9 bereits grob auf die zu erwartenden theoretischen ug-Kern-Spektren

schließen. Es ist anzunehmen, daß sie mit einer Rotationsbande

$$(J, \pi) = \frac{3}{2} +, \frac{5}{2} +, \frac{7}{2} +, \dots$$

beginnen, welche auf dem tiefsten Nilssonniveau $(|\Omega|, \pi) = (\frac{3}{2}, +)$ aus Abbildung 9 aufbaut. Außerdem werden die unteren Zustände dieser Bande hauptsächlich zur Schwingungsquantenzahl $n_R=0$ gehören.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir das experimentelle Spektrum von $^{21}_{10}\text{Ne}$ (vgl. Abb. 10) und stellen fest, daß es - wie oben vermutet wurde - mit Zuständen

$$(J, \pi) = \frac{3}{2} +, \frac{5}{2} +, \frac{7}{2} +, \dots$$

beginnt, die an eine Rotationsbande erinnern. Wieweit man tatsächlich von einer solchen sprechen kann, soll später genauer untersucht werden. Hier versuchen wir zunächst, das theoretische Spektrum möglichst im gesamten Bereich 0-4 MeV an das experimentelle anzupassen. Dazu haben wir - wie eingangs erwähnt wurde - für die Parameter C_0 und C spezielle Werte aus den vorgegebenen Intervallen (11.2) und (11.3) zu wählen. Es zeigt sich, daß das theoretische Spektrum dabei in jedem Fall ebenfalls mit Zuständen $\frac{3}{2}+, \frac{5}{2}+, \frac{7}{2}+, \dots$ beginnt und daß die zugehörigen Energieabstände hauptsächlich von C_0 abhängen. Die beste Übereinstimmung mit dem Experiment erhält man für den Wert

$$(11.5) \quad C_0 = 6,5 \cdot 10^2 \text{ fm}^2 \text{ KeV}^{1/2},$$

der mit (11.2) verträglich ist.

Die andere Konstante C wählen wir in Einklang mit (11.3) so, daß der tiefste ($\frac{3}{2}-$)-Zustand im theoretischen Spektrum so wie im experimentellen Spektrum bei 2,8 MeV Anregungsenergie erscheint. Dies erreicht man für:

(11.6) $C = -2,92 \text{ MeV.}$

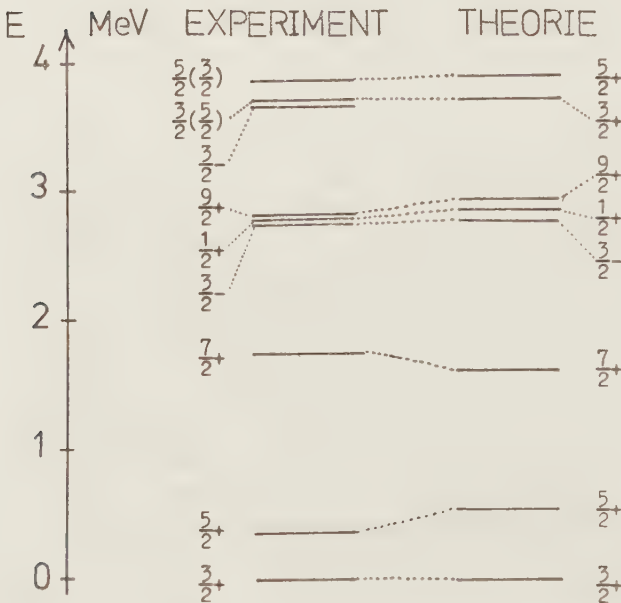


Abbildung 10: Experimentelles und theoretisches $^{21}_{10}\text{Ne}^{-}$ -Spektrum; Parameterwerte im theor. Spektrum:
 $C_0 = 6,5 \cdot 10^2 \text{ fm}^2 \text{ KeV}^{1/2}$; $C = -2,92 \text{ MeV.}$

Vergleichen wir das experimentelle $^{21}_{10}\text{Ne}$ -Spektrum mit dem theoretischen, so sehen wir, daß die Übereinstimmung gut ist mit zwei Einschränkungen:

- (a) der unterste ($\frac{5}{2}^+$)-Zustand liegt im theoretischen Spektrum um etwa 60% zu hoch; dies wird später noch eingehend diskutiert werden
- (b) im experimentellen Spektrum treten im Bereich 0-4MeV zwei ($\frac{3}{2}^-$)-Zustände auf, während das theoretische Spektrum hiervon nur den unteren wiedergibt.

Die Tatsache, daß das Nilssonmodell hier nur einen Zustand negativer Parität unterhalb 4MeV Anregungsenergie erklären kann, wurde schon 1969 von A.J. HOWARD und 1971 von H. RÖPKE diskutiert [27,28]. Beide waren der Ansicht, daß einer der beiden ($\frac{3}{2}^-$)-Zustände als Rotationszustand des $^{21}_{10}\text{Ne}$ -Kerns aufzufassen ist, bei dem das Außennukleon in einem Nilssonzustand mit $(|\Omega|, \pi) = (\frac{1}{2}, -)$ sitzt. Dieses Nilssonniveau liegt in Abbildung 9 bei 3,3MeV. Weiterhin stimmen beide Autoren darin überein, daß ein zweiter ($\frac{3}{2}^-$)-Zustand im niederenergetischen $^{21}_{10}\text{Ne}$ -Spektrum nur so gedeutet werden kann: ein Rumpf-Nukleonen-Paar aus der (N=1)-Schale wird aufgebrochen und eines der beiden Teilchen wird in die (N=2)-Schale gehoben. Diese "Rumpfanregung" kann aber das vorliegende Modell nicht beschreiben, sodaß im theoretischen $^{21}_{10}\text{Ne}$ -Spektrum der bei 3,66 MeV gelegene ($\frac{3}{2}^-$)-Zustand nicht auftritt.

In den bisherigen Überlegungen haben wir im experimentellen $^{21}_{10}\text{Ne}$ -Spektrum pauschal die Grundzustandsbande

$$(J, \pi) = \frac{3}{2}^+, \frac{5}{2}^+, \frac{7}{2}^+, \frac{9}{2}^+,$$

sowie die beiden ($\frac{3}{2}^-$)-Zustände betrachtet. Die verbleibenden Zustände zu den Drehimpulsen $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ könnten zu einer weiteren Rotationsbande gehören, wozu als Voraussetzung zumindest die (experimentell nicht vollständig bekannten) Paritäten dieser Zustände übereinstimmen müßten.

Genauere Aussagen bzgl. der Zugehörigkeit zu Rotationsbanden usw. sind aber bei den theoretischen Zuständen möglich. Wir sehen uns dazu die betreffenden Wellenfunktionen als Linearkombinationen der Entwicklungsfunktionen (10.2) an. Da letztere jeweils zu einer bestimmten Schwingungsquantenzahl n_R und zu einem bestimmten Nilssonzustand $(|\Omega|, \pi)$ gehören, bezeichnen wir die Entwicklungsfunktionen durch $|n_R, |\Omega|, \pi\rangle_w$, wobei w noch eine Nummer des betreffenden Nilssonzustands ist (vgl. Abb. 11).

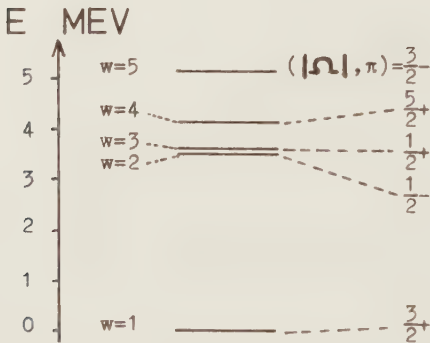


Abbildung 11:

Nilsson-niveaus zu mittlerem Nilssonpotential;
Klassifizierung durch $w, |\Omega|, \pi$.

$(\frac{3}{2}^+)$ -Grundzustand

$$\Psi = 0,99 \left| 0, \frac{3}{2}^+ \right\rangle_1 + \dots$$

$(\frac{5}{2}^+)$ -Zustand; Energie: 0,56 MeV

$$\Psi = 0,92 \left| 0, \frac{3}{2}^+ \right\rangle_1 + 0,32 \left| 0, \frac{5}{2}^+ \right\rangle_4 + \dots$$

$(\frac{7}{2}^+)$ -Zustand; Energie: 1,65 MeV

$$\Psi = 0,89 \left| 0, \frac{3}{2}^+ \right\rangle_1 + 0,39 \left| 0, \frac{5}{2}^+ \right\rangle_4 + \dots$$

$(\frac{9}{2}^+)$ -Zustand; Energie: 2,96 MeV

$$\begin{aligned} \Psi = & 0,84 \left| 0, \frac{3}{2}^+ \right\rangle_1 + 0,40 \left| 0, \frac{5}{2}^+ \right\rangle_4 + \\ & + 0,28 \left| 0, \frac{1}{2}^+ \right\rangle_3 + \dots \end{aligned}$$

Die hier angegebenen Wellenfunktionen zeigen, daß die zugehörigen Zustände $\frac{3}{2}^+$, $\frac{5}{2}^+$, $\frac{7}{2}^+$, $\frac{9}{2}^+$ des theoretischen ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ -Spektrums in guter Näherung eine Rotationsbande zum Nilssonzustand Nr.1 bilden. Mit zunehmenden Drehimpulsen werden aber die Nilssonzustände Nr.3 (mit $|\Omega|=\frac{1}{2}$) und Nr.4 (mit $|\Omega|=\frac{5}{2}$) beigemischt. Dies ist die übliche Rotationsbandenmischung, die auftritt, wenn sich die Projektionsquantenzahlen $|\Omega|$ der zugrunde liegenden Nilssonzustände - wie hier - betragsmäßig um 1 unterscheiden (vgl.Kap.X).

Wir betrachten als nächstes die Wellenfunktion zum

$(\frac{3}{2}^-)$ -Zustand mit Energie: 2,79 MeV

$$\Psi = 0,94 \left| 0, \frac{1}{2}^- \right\rangle_2 + 0,29 \left| 0, \frac{3}{2}^- \right\rangle_5 + \dots$$

Hieraus ersehen wir, daß dieser $(\frac{3}{2}^-)$ -Zustand (wie von H. Röpke und A.J. Howard vermutet [27,28]) als Rotationszustand zum $(\frac{1}{2}^-)$ -Nilssonniveau Nr.2 aufgefaßt werden kann, wobei der bei $(J=\frac{1}{2})$ -Banden mögliche Effekt eintritt, daß nicht der Bandenkopf der $(\frac{1}{2}^-)$ -Bande, sondern wie hier der darauf folgende $(\frac{3}{2}^-)$ -Zustand energetisch am tiefsten liegt.

Damit sind noch folgende Wellenfunktionen zu untersuchen:

$(\frac{1}{2}^+)$ -Zustand; Energie: 2,87 MeV

$$\Psi = 0,99 \left| 0, \frac{1}{2}^+ \right\rangle_3 + \dots$$

$(\frac{3}{2}^+)$ -Zustand; Energie: 3,74 MeV

$$\Psi = 0,97 \left| 0, \frac{1}{2}^+ \right\rangle_3 + \dots$$

$(\frac{5}{2}^+)$ -Zustand; Energie: 3,93 MeV

$$\Psi = 0,74 \left| 0, \frac{1}{2}^+ \right\rangle_3 - 0,63 \left| 0, \frac{5}{2}^+ \right\rangle_4 + 0,22 \left| 0, \frac{3}{2}^+ \right\rangle_1 + \dots$$

Die ersten beiden Zustände sind offensichtlich der Beginn einer Rotationsbande zum Nilssonzustand Nr.3 mit

($|\underline{n}|; \pi$) = $\frac{1}{2}+$, während der dritte Zustand nicht hierzu gehört. Er enthält mit etwa gleich großen Wahrscheinlichkeiten die Nilssonzustände ($|\underline{n}|; \pi$) = $\frac{1}{2}+$ und $\frac{5}{2}+$ (Nr.3 und Nr.4).

In der bisherigen Diskussion der Wellenfunktionen wurden nur solche Entwicklungsfunktionen berücksichtigt, die mit mindestens 5% zur jeweiligen Gesamtwellenfunktion beitrugen. Es traten deshalb keine Entwicklungsfunktionen zur Schwingungsquantenzahl $n_R=1$ auf, da deren Anteile nur einige Prozent ausmachen. Es stellt sich somit die Frage, ob die übliche Anwendung des Nilssonmodells auf den Kern $^{21}_{10}\text{Ne}$, unter Verwendung eines starrten Rumpfs und einer festen Deformation des Nilssonpotentials, nicht ziemlich ähnliche Ergebnisse wie das vorliegende Modell liefert. Diese Frage kann nur ein Vergleich entscheiden. Bevor wir diesen durchführen, müssen wir uns nochmals die Unterschiede beider Modelle klar machen. Im "üblichen Nilssonmodell" werden das Rumpftträgheitsmoment Θ_0 und die Deformation β_0 des Nilssonpotentials als freie (und voneinander unabhängige) Parameter an das betreffende ug-Kern-Spektrum angepaßt - und zwar ohne Bezug auf Trägheitsmoment und Deformation des zugrundeliegenden gg-Rumpfes. Demgegenüber werden im vorliegenden ug-Kern-Modell weder Θ noch β an das ug-Kern-Spektrum angepaßt. Vielmehr wird Θ so gewählt, daß es mit dem Rumpftträgheitsmoment übereinstimmt, wobei eine Veränderung desselben infolge Zentrifugalstreckung berücksichtigt wird. Die Deformation β tritt als Parameter überhaupt nicht in Erscheinung, sondern wird über die empirische "Scharff-Goldhaber-Beziehung" eine Funktion

von Θ .

Ein Vergleich des vorliegenden Modells mit einem ohne Schwingung arbeitenden Nilssonmodell wirft also die Frage auf: "Welche Parameterwerte Θ_0 und β_0 sollen denn in dieses Vergleichs-Nilsson-Modell eingesetzt werden?". Je nach Wahl beider Parameter werden die Ergebnisse beider Modelle sich mehr oder weniger stark unterscheiden; aber daraus können keine physikalischen Folgerungen gezogen werden. Auch sind in der Literatur keine Nilsson-Modell-Rechnungen zu den Spektren von $_{10}\text{Ne}^{21}$ oder $_{11}\text{Na}^{21}$ zu finden, die als Vergleich dienen könnten.

Wir bestimmen deshalb die Parameterwerte für Θ_0 und β_0 , indem wir vom vorliegenden ug-Kern-Modell ausgehen und hier einen Übergang zum starren Rumpf durchführen. Das feste Trägheitsmoment Θ_0 wählen wir so, daß es aus dem variablen Trägheitsmoment der an $_{10}\text{Ne}^{20}$ angepaßten Hantel für $L_R \rightarrow 0$ entsteht. Dieser Grenzübergang wurde schon des öfteren durchgeführt und ergab (vgl. Kap. VIII):

$$\frac{\hbar^2}{2\Theta_0} = \frac{\Delta E_R}{4\sqrt{Q}}$$

(ΔE_R u. Q sind die Parameter des an das $_{10}\text{Ne}^{20}$ -Spektrum angepaßten Hantelpotentials)

Zu diesem Θ_0 -Wert können wir mit " $\Theta_0 = M g_0^2$ " eine feste Hantellänge g_0 berechnen. Diese setzen wir in die Funktion $B(g_R)$ aus (11.1) ein und erhalten damit einen Wert für die feste Deformation β_0 des starren Nilssonpotentials.

Um uns den Zusammenhang zwischen dem drehimpulsabhängigen Trägheitsmoment $\Theta(L_R)$ der weichen Hantel

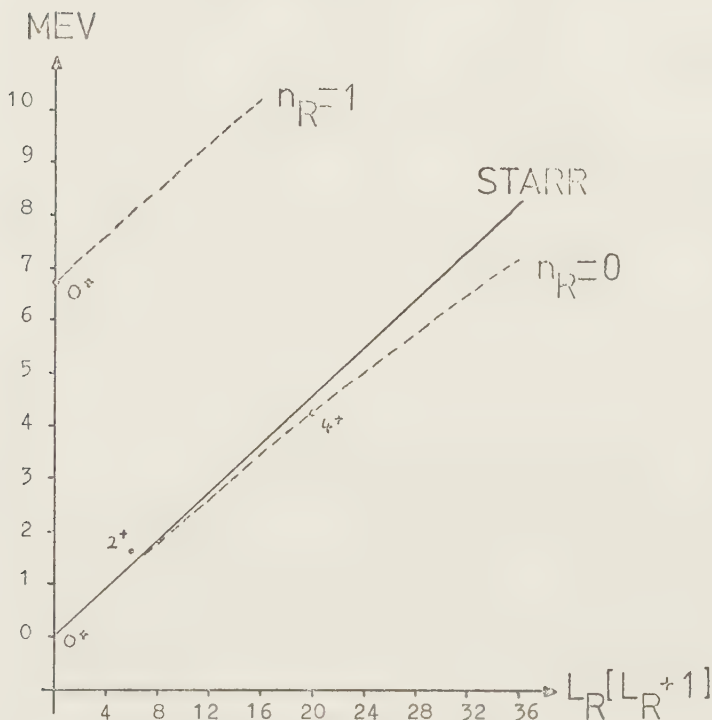


Abbildung 12:

Die Energien der starren und weichen Hantel sind als Funktion von $L_R(L_R+1)$ aufgetragen und mit einer durchgezogenen Linie (starr) bzw. einer unterbrochenen Linie (weich) verbunden; die mit $0^+, 2^+, 4^+, 0^+$ bezeichneten Punkte sind die experimentellen Werte.

und dem festen Trägheitsmoment Θ_0 der starren Hantel zu veranschaulichen, sind in Abbildung 12 die Energien ($E_{n_R; L_R} - E_{0;0}$) der weichen Hantel als Funktion von $L_R(L_R+1)$ aufgetragen (wobei L_R als kontinuierliche Variable behandelt wurde). Wir erhalten zu jeder Schwingungsquantenzahl n_R eine (in Abb.12 gestrichelte) Kurve, deren veränderliche Steigung die Änderung des Trägheitsmoments mit L_R wiedergibt (Zentrifugalstreckung!). Der oben gewählte Θ_0 -Wert wird dann durch die Steigung der Tangente gegeben, die im Punkt $L_R=0$ an die ($n_R=0$)-Kurve gelegt wird. In Abbildung 12 bedeutet also der Übergang von der weichen zur starren Hantel - pauschal ausgedrückt -, daß die beiden gestrichelten Kurven durch die durchgezogene Gerade ersetzt werden.

Dieser Übergang von der weichen zur starren Hantel hat eine Änderung der Rumpfeigenschaften sowie eine Änderung des Einteilchenpotentials zur Folge. Es ist zu erwarten, daß eine Änderung der Rumpfeigenschaften sich vor allem in der Struktur der theoretischen $^{21}_{10}\text{Ne}$ -Rotationsbanden bemerkbar macht. Andererseits kann eine Veränderung des Einteilchenpotentials zu neuen Einteilchenenergien führen, wodurch sich neue Energieabstände der Rotationsbanden untereinander ergeben können. In Abbildung 13a ist zu sehen, daß beide Effekte einen deutlichen Einfluß auf das theoretische $^{21}_{10}\text{Ne}$ -Spektrum haben. So ergeben sich beträchtliche Unterschiede in der Struktur der $^{21}_{10}\text{Ne}$ -Grundzustandsbande, je nachdem, ob eine weiche oder eine starre Hantel zugrunde liegt, wobei im Falle der weichen Hantel der experimentelle Sachverhalt wesentlich besser wiedergegeben wird. Aber auch die gegenseitigen Energieabstände

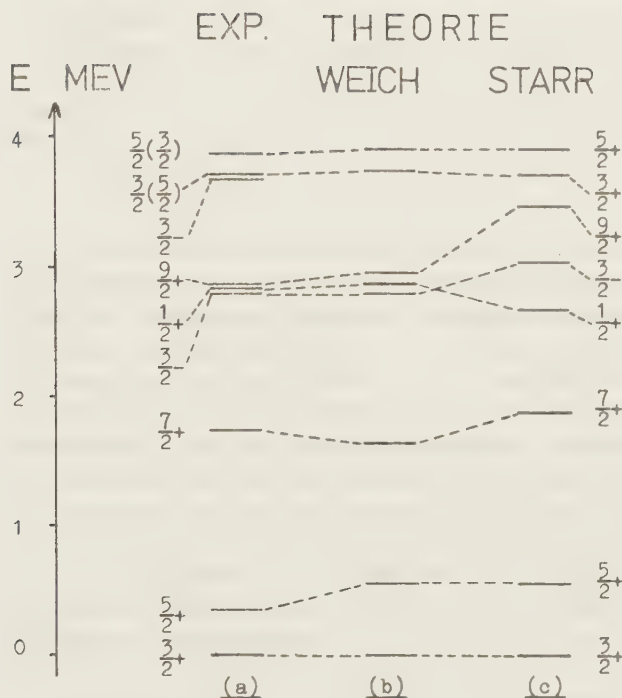


Abbildung 13a:

- (a) experimentelles $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Spektrum
- (b) theoretisches $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Spektrum mit weicher Hantel;
die Hantelparameter $\Delta E_R = 6,72 \text{ MeV}$ und $Q = 52,9$ wurden
so gewählt, daß die Energieabstände ($0^+ - 4^+$) und
($0^+ - 0^+$) an das $_{10}\text{Ne}^{20}$ -Spektrum angepaßt sind
- (c) theoretisches $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Spektrum mit starrer Hantel;
 $\Theta_0 = 0,23 \text{ MeV}$ und $\beta_0 = 0,34$.

der theoretischen Rotationsbanden ändern sich, wenn wir von der weichen zur starren Hantel übergehen. Dies sieht man in Abb.13a, wenn man die Energien der Rotationsbandenanfänge

$$(J, \pi) = \frac{3}{2} + (= \text{Grundzustand}); \quad (J, \pi) = \frac{1}{2} + \text{u.} \quad (J, \pi) = \frac{3}{2} -$$

betrachtet.

Wir haben oben festgestellt, daß die Veränderung des Rumpfpotentials (weich $\longrightarrow$ starr) sich einerseits auf die Rumpfeigenschaften, andererseits auf das Einteilchenpotential auswirkt. Dabei dürfen wir aber nicht vergessen, daß das Einteilchen-Potential auch noch von der Stärke C der Spin-Bahn-Wechselwirkung abhängt. Eine gegenseitige energetische Verschiebung von Rotationsbanden im theoretischen ug-Kern-Spektrum kann also durch die Änderung des Hantelpotentials, aber ebenso auch durch eine Änderung des Parameters C bewirkt werden, da beides die Einteilchen-Energien beeinflusst.

In Abbildung 13a wurde beim Übergang von der weichen zur starren Hantel der Wert von C festgehalten, sodaß die beobachteten Rotationsbandenverschiebungen allein auf die Veränderung der Rumpfeigenschaften zurückgehen. Tatsächlich kann man aber auch die gleichen Verschiebungen - und zwar vollständig - durch eine geringfügige Verkleinerung des Parameters C erreichen.

Dies ist jedoch nicht möglich, was den Einfluß des Hantelpotentials auf die Struktur der theoretischen $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande betrifft. Die deutlichen Änderungen, die sich hier beim Übergang von der weichen zur starren Hantel ergaben (vgl. Abb.13a), lassen sich nicht - analog wie oben - auch durch eine passende Wahl des Parameters C erreichen. Vielmehr zeigt die Rechnung, daß die Gestalt der theoretischen $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande fast völlig unverändert bleibt,

selbst wenn man C über einen weiten Bereich variiert. Theoretisch wäre allerdings ein Einfluß von C auf die Struktur der Grundzustandsbande denkbar: eine Veränderung von C verschiebt ja die Einteilchenenergien und führt zu neuen Einteilchenzuständen; dies muß sich auf die "Rotationsbandenmischung" auswirken, von der wiederum die Struktur der einzelnen Banden abhängt.

Nachdem wir nun wissen, daß die Gestalt der theoretischen $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande nahezu nur von der Wahl des Hantelpotentials abhängt, wollen wir diesen Zusammenhang nochmals eingehend untersuchen und dabei den vernachlässigbaren Einfluß von C unberücksichtigt lassen. Dabei soll uns die Frage beschäftigen, ob die experimentelle $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande durch eine neue Wahl der Hantelparameter noch besser als in Abbildung 13a wiedergegeben werden kann. Bisher haben wir ja die Parameter ΔE_R und Q so festgelegt, daß im zugehörigen Hantelspektrum die Energieabstände 0^+-4^+ und 0^+-0^+ an das experimentelle $_{10}\text{Ne}^{20}$ -Spektrum angepaßt waren. Dabei konnten in der theoretischen $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande die Energieabstände

$$\left(\frac{3}{2}^+\right) \longrightarrow \left(\frac{7}{2}^+\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{3}{2}^+\right) \longrightarrow \left(\frac{9}{2}^+\right)$$

gut wiedergegeben werden, während sich beim Abstand $\left(\frac{3}{2}^+\right) \longrightarrow \left(\frac{5}{2}^+\right)$ eine 60%-ige Abweichung vom Experiment ergab. Dies könnte aber daran liegen, daß bei der bisherigen Wahl des Hantelpotentials auch im Hantelspektrum der unterste Energieabstand 0^+-2^+ vom entsprechenden experimentellen Abstand im $_{10}\text{Ne}^{20}$ -Spektrum abweicht.

Wir wählen deshalb neue Potentialparameter in $V_R(\mathfrak{S}_R)$ so, daß im theoretischen Rumpfspektrum (d.h. im theor. Spektrum zu $_{10}\text{Ne}^{20}$) die Energieabstände 0^+-2^+ und 0^+-4^+ mit dem Experiment übereinstimmen und hoffen, daß dann die Struktur der theoretischen $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande ebenfalls besser wiedergegeben wird. Vergleichen wir die neuen Hantelparameter mit den bisherigen:

bisherige Anpassung:

$$0^+-0^+ \text{ und } 0^+-4^+ : \quad Q = 52,9; \quad \Delta E_R = 6,72 \text{ MeV};$$

neue Anpassung:

$$0^+-2^+ \text{ und } 0^+-4^+ : \quad Q = 5,9; \quad \Delta E_R = 3,20 \text{ MeV}.$$

Aus Kapitel VIII wissen wir, daß der Wert des Parameters Q die "Weichheit" der Hantel charakterisiert. $Q=\frac{1}{4}$ ergab den 3-dimensionalen harmonischen Oszillator; $Q \rightarrow \infty$ bedeutete den Übergang zur starren Hantel. In der neuen Anpassung wird also eine weichere Hantel als bisher verwendet, die jetzt aber die Zentrifugalstreckung im $0^+-2^+-4^+$ -Bereich des experimentellen Rumpfspektrums exakt wiedergibt. Als Nachteil stellt sich dabei ein, daß der 0^+-0^+ -Energieabstand im neuen theoretischen Rumpfspektrum $\Delta E_R=3,2\text{MeV}$ beträgt und somit stark vom experimentellen Wert ($6,72\text{MeV}$) abweicht. Mit der neuen Anpassung kann dann das $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Spektrum höchstens noch bis zu 3MeV Anregungsenergie beschrieben werden (bisher 4MeV). Die ideale Lösung - ein Hantelpotential, welches

die Weichheit des Rumpfes und gleichzeitig den 0^+-0^+ -Energieabstand richtig wiedergibt, konnte nicht gefunden werden. Möglicherweise handelt es sich hierbei um eine Schwierigkeit grundsätzlicher Art, die auf die Grenzen des Hantelmodells hindeutet. Wahrscheinlich muß man von der linear schwingenden Hantel zu einem dreidimensional schwingenden Gebilde übergehen, um auch bei großer Weichheit einen entsprechend großen (0^+-0^+)-Energieabstand zu erhalten.

Kehren wir zurück zu der Frage, ob die theoretische Beschreibung der experimentellen $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande mit dem neuen Rumpfpotential besser gelingt! Um speziell den Einfluß der "Weichheit" zu erkennen, führen wir wieder einen Übergang von einer starren zu einer weichen Hantel durch. Die starre Hantel wählen wir so, daß sie den experimentellen Energieabstand 0^+-4^+ im Rumpfspektrum bereits richtig wiedergibt. Die weiche Hantel möge zu den neu eingeführten Hantelparametern gehören, beschreibt also außerdem noch den Energieabstand 0^+-2^+ richtig (vgl. Abb.14).

Der "Weichheitsparameter" Q läuft bei diesem Übergang von sehr großen Werten (starre Hantel) zum Wert $Q=5,9$. Die Rechnung zeigt, daß dabei in der theoretischen $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande die Energieabstände $(\frac{3}{2}^+)-(\frac{7}{2}^+)$ und $(\frac{3}{2}^+)-(\frac{9}{2}^+)$ nahezu unverändert bleiben und in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten sind. Dagegen hängt die Energiedifferenz zu $(\frac{3}{2}^+)-(\frac{5}{2}^+)$ deutlich von Q ab. Sie wird für eine zu starre Hantel zu groß und ergibt für $Q=5,9$ nahezu den experimentellen Wert.

Diesen Sachverhalt zeigt die Abbildung 13b, aus der aber noch nicht deutlich genug hervorgeht, wie stark die Gestalt der experimentellen $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande von der üblichen Rotationsbandenform abweicht und wie erfreulich es deshalb ist, daß das

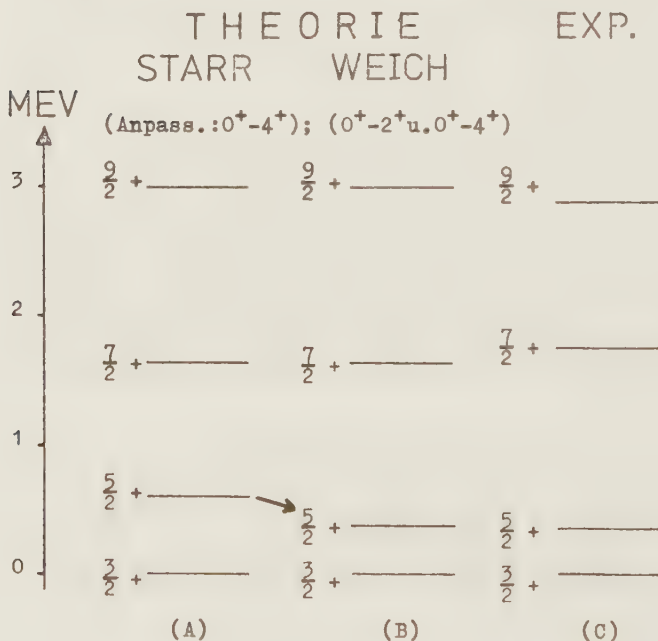
einfache Hantelmodell ebendiese Anomalie zu erklären vermag. Um uns dies klar zu machen, rechnen wir für die Zustände (J, π) der experimentellen und der theoretischen ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande Größen Θ_J aus, die man näherungsweise als "Trägheitsmomente" bezeichnen kann und verwenden dazu die Energieabstände dieser Zustände vom $(\frac{3}{2}^+)$ -Grundzustand:

$$(11.7) \quad E(J, \pi) - E(\frac{3}{2}^+) =_{\text{Def}} \frac{\hbar^2}{2 \Theta_J} \left[J(J+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) \right]$$

Abbildung 13b:

Der Einfluß der Hantelweichheit auf die Grundzustandsbande des theoretischen ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ -Spektrums und zum Vergleich die experimentelle Grundzustandsbande

- (A) Theorie mit starrer Hantel (Anpassung: $0^+ - 4^+$)
 (B) Theorie mit weicher Hantel ($\Delta E_R = 3,2 \text{ MeV}$; $Q = 5,9$)
 (C) Experimentelle ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande



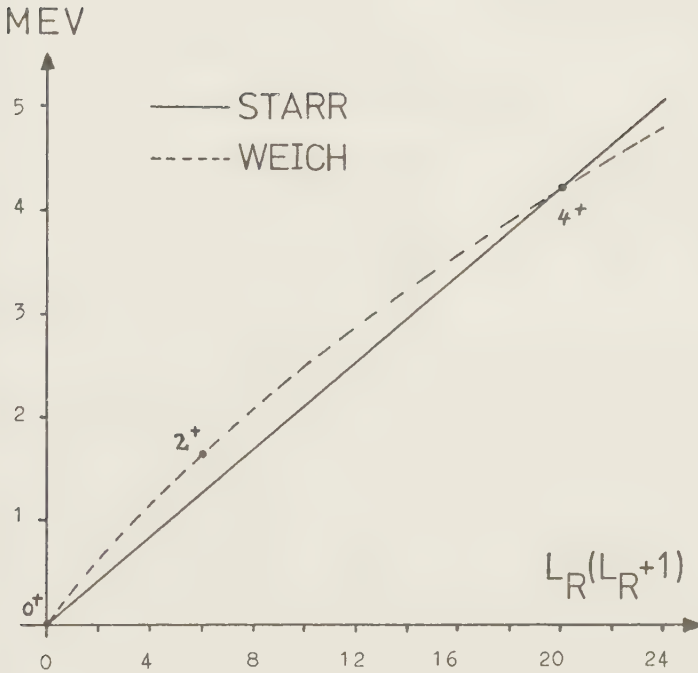


Abbildung 14:

Die Energien einer starren und einer weichen Hantel sind als Funktionen einer (kontinuierlichen) Variablen $L_R(L_R+1)$ aufgetragen (L_R =Rumpfdrehimpuls). Die mit 0^+ , 2^+ und 4^+ bezeichneten Punkte sind experimentelle Werte aus dem ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ -Spektrum.

Mit Hilfe von (11.7) erhalten wir aus den experimentellen Energieabständen:

(11.8)

$$\frac{\hbar^2}{\Theta(\frac{5}{2})} = 140 \text{ KeV};$$

EXPERIMENT

$$\frac{\hbar^2}{\Theta(\frac{7}{2})} = 291 \text{ KeV};$$

$$\frac{\hbar^2}{\Theta(\frac{9}{2})} = 273 \text{ KeV}.$$

Diese experimentellen Werte zeigen uns, daß in der Grundzustandsrotationsbande von $_{10}\text{Ne}^{21}$ der Zustand $\frac{5}{2}^+$ eine auffallende Anomalie aufweist. Bei einer exakten $J(J+1)$ -abhängigen Rotationsbande würden wir in allen drei Fällen das gleiche Trägheitsmoment erhalten. Aber eine solche Rotationsbande wäre schon bei starrem Rumpf nicht zu erwarten, da die sog. "Rotationsbandenmischung" (mathematisch bedingt durch die Operatoren J_+j_- und J_-j_+ aus H_{ug}) hier schon unterschiedliche Werte Θ_J bewirkt. In welchem Maß bei starrer Hantel die Θ_J -Werte voneinander abweichen, zeigt die Rechnung für $Q \gg 5,9$:

(11.9)

$$\frac{\hbar^2}{\Theta(\frac{5}{2})} = 244 \text{ KeV};$$

THEORIE

(Starre Hantel)

$$\frac{\hbar^2}{\Theta(\frac{7}{2})} = 279 \text{ KeV};$$

$$\frac{\hbar^2}{\Theta(\frac{9}{2})} = 285 \text{ KeV}.$$

In Abbildung 15 sehen wir nochmals graphisch, daß die experimentellen $(\hbar^2/\theta)$ -Werte aus (11.8) (in der Abbildung 15 ganz rechts skizziert) wesentlich stärker voneinander abweichen als die in (11.9) angegebenen theoretischen Werte zur starren Hantel (in der Abbildung links). Vor allem aber soll die Abbildung zeigen, daß der experimentelle Sachverhalt theoretisch recht gut wiedergegeben werden kann, wenn nur die richtige Weichheit der Hantel gewählt wird, d.h. wenn der sich aus dem experimentellen $^{10}\text{Ne}^{20}$ -Spektrum ergebende Wert $Q=5,9$ genommen wird.

In den bisherigen Überlegungen haben wir die Größen $\hbar^2/\theta_J$ verwendet, welche bis auf jeweils einen Faktor Energiedifferenzen in der $^{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande wiedergeben. Es soll nun noch ergänzend die Frage untersucht werden, inwieweit die daraus berechenbaren Größen θ_J etwas über die tatsächlichen Trägheitsmomente der betreffenden ug-Kern-Konfigurationen aussagen. Das gleiche Problem tritt beim Rumpf auf, ist dort aber leichter zu überblicken. Auch hier können wir fragen: "Dürfen wir bei der weichen Hantel von den energetischen Abständen 0^+-2^+ und 0^+-4^+ auf die Mittelwerte

$$\left\langle \frac{\hbar^2}{\theta_{\text{Hantel}}} \right\rangle$$

in den Zuständen 2^+ und 4^+ schließen?"

Betrachten wir dazu nochmals die Abbildung 14, wo bei festgehaltenem Energieabstand 0^+-4^+ ein Übergang von der starren zur weichen Hantel durchgeführt wurde. Die starre Hantel besitzt hier in allen Zuständen das konstante reziproke Trägheitsmoment

$$\frac{\hbar^2}{\theta_{\text{Starr}}} = 0,43 \text{ MeV.}$$

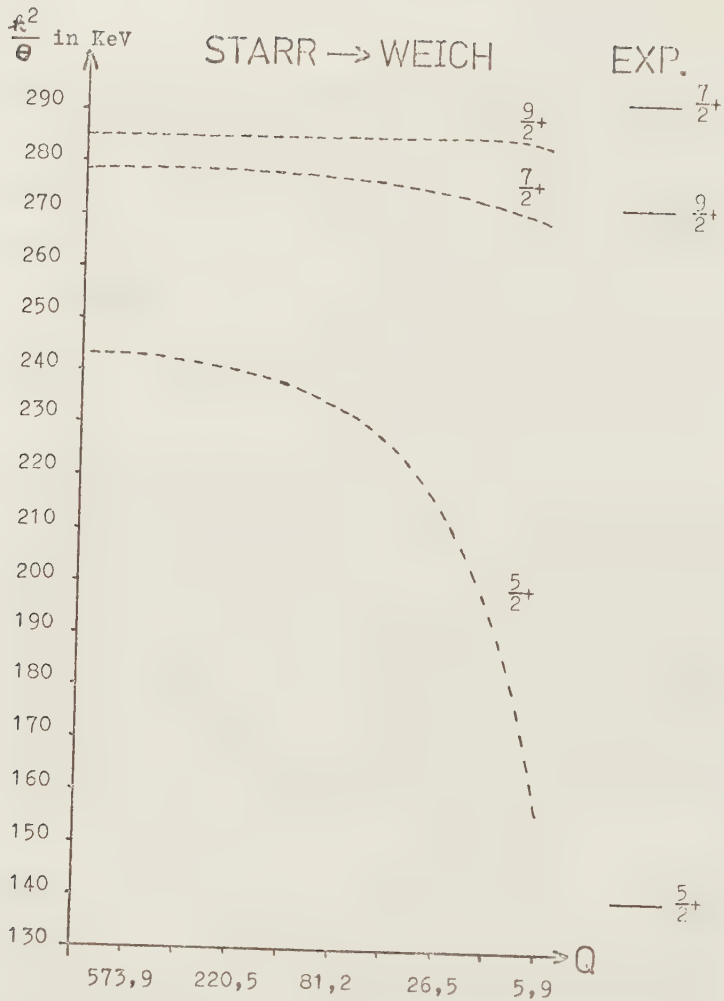


Abbildung 15:

$\frac{E^2}{\epsilon}$ -Werte in KeV für Zustände der $_{10}\text{Ne}^{21}$ -Grundzustandsbande. Die theoretischen Werte wurden für variable Weichheit Q der Hantel bestimmt.

Bei der weichen Hantel erhalten wir im (4^+) -Zustand für den Erwartungswert des reziproken Trägheitsmoments:

$$\langle 4^+ | \frac{\mathcal{A}^2}{M \mathfrak{I}_R} | 4^+ \rangle = 0,31 \text{ MeV.}$$

Dieser Unterschied zum obigen starren Wert wird in Abbildung 14 geometrisch dadurch sichtbar, daß die Energiekurven von starrer und weicher Hantel für $L_R=4$ verschiedene Steigungen besitzen. Unser Ergebnis lautet also: Obwohl beim Übergang von der starren zur weichen Hantel der Energieabstand 0^+-4^+ fest bleibt, ändert sich das Trägheitsmoment der Hantel im (4^+) -Zustand beträchtlich.

Andererseits findet man: Der Übergang ändert das Trägheitsmoment der Hantel im (2^+) -Zustand nahezu nicht (starr: $\mathcal{A}^2/\Theta = 0,43 \text{ MeV}$; weich: $\langle \mathcal{A}^2/\Theta \rangle = 0,46 \text{ MeV}$), obwohl sich gerade der (0^+-2^+) -Energieabstand besonders vergrößert. Machen wir uns an diesem Beispiel die physikalischen Hintergründe etwas klarer und fragen, warum der Übergang von $L_R=0$ nach $L_R=2$ bei der weichen Hantel mehr Energie als bei der starren Hantel erfordert. Beide Hanteln besitzen ja für $L_R=0$ keine Rotationsenergie und für $L_R=2$ etwa die gleiche Rotationsenergie, da - wie wir oben sahen - für $L_R=2$ ihre mittleren reziproken Trägheitsmomente nahezu übereinstimmen. Beim Übergang 0^+-2^+ erhält also die weiche Hantel die gleiche Rotationsenergie wie die starre Hantel. Darüberhinaus ändert sich hierbei aber auch noch die potentielle Energie der weichen Hantel, welche für $L_R=0$ einen kleineren mittleren Abstand $\mathfrak{I}_R$ als für $L_R=2$

besitzt. Diese Zunahme der mittleren potentiellen Energie muß also für den Unterschied des (0^+-2^+) -Energieabstands bei starrer und weicher Hantel verantwortlich sein.

Wir können uns dies noch besser klar machen, indem wir die Energien der Hantel als Erwartungswerte des Hantelhamiltonoperators H_R (vgl.(5.23)) in den stationären Hantelzuständen schreiben:

$$\begin{aligned} \underline{(11.10)} \quad \langle H_R \rangle &= \left\langle \left[-\frac{\hbar^2}{2M} [\mathcal{P}_R] + V_R(\mathcal{P}_R) \right] \right\rangle + \\ &+ L_R(L_R+1) \cdot \left\langle \frac{\hbar^2}{2M \mathcal{P}_R^2} \right\rangle . \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite gibt die mittlere Schwingungs- und potentielle, der zweite Term die mittlere Rotationsenergie der Hantel in einem gegebenen stationären Zustand an.

Die Energiedifferenz zu den Zuständen 0^+ und L_R^+ schreibt sich dann in der Form:

$$\begin{aligned} \underline{(11.11)} \quad E(L_R^+) - E(0^+) &= \\ &= \langle L_R^+ | -\frac{\hbar^2}{2M} [\mathcal{P}_R] + V_R | L_R^+ \rangle - \\ &- \langle 0^+ | -\frac{\hbar^2}{2M} [\mathcal{P}_R] + V_R | 0^+ \rangle + \\ &+ L_R(L_R+1) \left\langle L_R^+ | \frac{\hbar^2}{2M \mathcal{P}_R^2} | L_R^+ \right\rangle . \end{aligned}$$

Fragen wir nun, wie sich diese Energiedifferenz (11.11) ändert, wenn wir zu einem anderen Hantelpotential übergehen (z.B. Übergang: starr $\rightarrow$ weich), so müssen wir bedenken, daß sich dabei auf der rechten Seite von (11.11) für alle 3 Terme neue Werte ergeben. Das Verhalten der Ausdrücke

$$E(L_R^+) - E(0^+) \quad \text{und} \quad \langle L_R^+ | \frac{\hbar^2}{2M g_R} | L_R^+ \rangle$$

bei Potentialänderungen hängt also nicht in einfacher Weise zusammen.

Analog können wir auch im ug-Kern-Spektrum nicht wie bei einem starren Rotator aus Energiedifferenzen ohne weiteres auf Trägheitsmomente schließen, wenn ein weicher Rumpf zugrunde liegt. Ein entsprechender Ausdruck wie (11.11) wäre hier sogar noch komplizierter, da noch die Matrixelemente des schwingenden Nilssonpotentials zu berücksichtigen wären. Es ist also insbesondere sehr schwierig, das Ergebnis der Abbildung 15 mit einer einfachen Überlegung anschaulich zu erklären.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß in der Literatur bis jetzt keine weiteren Modellrechnungen zum Kern ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ existieren, die als Vergleich zu der hier durchgeführten Rechnung herangezogen werden könnten.

XII. Die Anwendung des Modells auf den Kern $_{11}\text{Na}^{21}$

Der Kern $_{11}\text{Na}^{21}$ hat den gleichen gg-Rumpf wie der schon behandelte Kern $_{10}\text{Ne}^{21}$, aber anstatt eines Neutrons ein Proton als Außennukleon. Die Abbildung 16 zeigt, daß die experimentellen Grundzustandsrotationsbanden in beiden Kernen die gleiche Gestalt besitzen, daß jedoch die untersten Zustände $(J, \pi) = \frac{1}{2}^+$ und $\frac{3}{2}^-$ der anderen beiden Banden in beiden Kernen verschieden hoch über dem jeweiligen Grundzustand liegen. Dies deutet darauf hin, daß die Einteilchen-Nilssonenergien, die zu den einzelnen Rotationsbanden gehören, für Proton und Neutron verschieden sind. Im Rahmen des Nilssonmodells wird dies üblicherweise dadurch berücksichtigt, daß die Stärke C der Spin-Bahn-Wechselwirkung bei Proton und Neutron verschieden gewählt wird. Wir wollen jedoch zunächst versuchen, ob wir mit der Coulombenergie des Protons diese Unterschiede erklären können.

Betrachten wir als erstes die beiden Kerne in ihrem jeweiligen Grundzustand $(J, \pi) = \frac{3}{2}^+$. Nach unseren Modellvorstellungen liegt hier in beiden Fällen der gleiche gg-Rumpf zugrunde und in beiden Kernen befindet sich das Außennukleon in einem Nilssonzustand mit den Quantenzahlen $(|\Omega|; \pi) = \frac{3}{2}^+$. Die zugehörigen Einteilchen-Nilssonenergien $E_P^{\text{Nil}}(\frac{3}{2}^+)$ und $E_N^{\text{Nil}}(\frac{3}{2}^+)$ können aber verschieden sein; insbesondere muß ihre Differenz gleich der Differenz der Bindungsenergien von $_{10}\text{Ne}^{21}$ und $_{11}\text{Na}^{21}$ (im Grundzustand) sein. Diese Bindungsenergien sind aber experimentell bekannt [33] und wir erhalten somit:

$$(12.1) \quad E_P^{\text{Nil}}(\frac{3}{2}^+) - E_N^{\text{Nil}}(\frac{3}{2}^+) = 3545 \text{ KeV.}$$

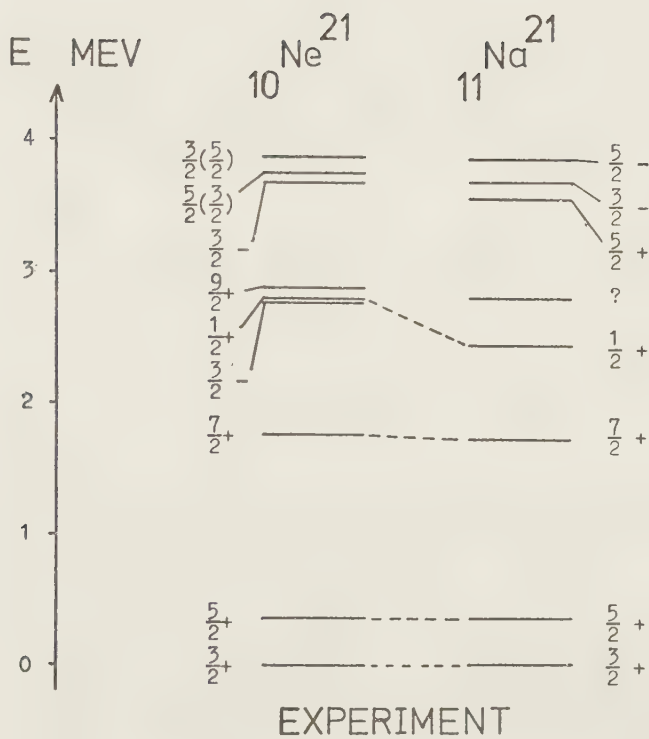


Abbildung 16:

Experimentelle Spektren der Kerne $^{21}_{10}\text{Ne}$ und $^{21}_{11}\text{Na}$

Wie bereits erwähnt, wollen wir diesen Energiebetrag hier nicht dadurch deuten, daß wir für Proton und Neutron eine verschieden starke Spin-Bahn-Wechselwirkung annehmen. Stattdessen wollen wir uns vorstellen, daß verschiedene Einteilchenenergien für Proton und Neutron dadurch zustande kommen, daß einmal beide Teilchen eine verschiedene Masse (m_P bzw. m_N) besitzen und daß zum anderen das Proton im Nilssonzustand $(1\Omega 1; \pi) = \frac{3}{2}^+$ die Coulombenergie $E_C(\frac{3}{2}^+)$ besitzt. Das ergibt:

$$(12.2) \quad E_P^{Nil}(\frac{3}{2}^+) - E_N^{Nil}(\frac{3}{2}^+) = (m_P - m_N)c^2 + E_C(\frac{3}{2}^+).$$

Mit (12.1) und $(m_P - m_N)c^2 = -1294 \text{ KeV}$ folgt sofort:

$$(12.3) \quad E_C(\frac{3}{2}^+) = 4839 \text{ KeV}.$$

Es sei daran erinnert, daß wir dieses Ergebnis unter der Annahme erhielten, daß die Energie des gg-Rumpfes im Grundzustand von $^{21}_{10}\text{Ne}$ die gleiche ist wie im Grundzustand von $^{21}_{11}\text{Na}$. Dies steht völlig in Einklang mit unseren bisherigen Modellvorstellungen, wo wir ja stets voraussetzten, daß $^{21}_{10}\text{Ne}$ und $^{21}_{11}\text{Na}$ den gleichen Rumpf besitzen. Diese Annahme können wir nun aber testen, indem wir den Wert für $E_C(\frac{3}{2}^+)$ aus dem Modell selbst ausrechnen und ihn dann mit (12.3) vergleichen. In unserem Modell befindet sich das Proton im Potential eines sphäroidischen Rumpfes, dessen mittlerer Kernradius R_0 und dessen mittlere Deformation $\bar{\epsilon}$ an den Kern $^{20}_{10}\text{Ne}$ angepaßt sind. Versehen wir diesen sphäroidischen Rumpf noch mit der (homogen verteilten) Ladung des $^{20}_{10}\text{Ne}$ -Kerns, so

können wir zu den verschiedenen Nilssonzuständen $(\Omega I; \pi)$ des Protons mittlere Coulombenergien $E_C^{\text{Theor.}}$ ausrechnen. Diese Rechnung ist aber sehr kompliziert, sodaß wir für eine grobe Abschätzung anstelle eines homogen geladenen Sphäroids besser eine homogen geladene Kugel gleicher Gesamtladung mit dem Kernradius R_0 zugrunde legen. Die potentielle Energie des Protons im Feld dieser Kugel ist dann gegeben durch:

$$(12.4) \quad V_P(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{2R_0} - \frac{r^2}{2R_0^3} \right) & \text{für } r \leq R_0; \\ \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{für } r \geq R_0 \end{cases}$$

(Z = Ordnungszahl; R_0 = Kernradius)

Hiermit erhalten wir zum tiefsten Nilssonzustand $(\Omega I; \pi) = \frac{3}{2}^+$ des Protons die mittlere Coulombenergie

$$(12.5) \quad E_C^{\text{Theor.}} \left(\frac{3}{2}^+ \right) = 4682 \text{ KeV.}$$

Dieser Wert ist von der gleichen Größenordnung wie der in (12.3) angegebene. Das zeigt die Konsistenz des Modells in dieser Hinsicht und die Berechtigung der ursprünglichen Annahme, daß die Kerne $_{10}\text{Ne}^{21}$ und $_{11}\text{Na}^{21}$ den gleichen Rumpf besitzen.

Bisher haben wir uns in diesen beiden Kernen nur mit dem tiefsten Nilssonzustand $(\Omega I; \pi) = \frac{3}{2}^+$ befaßt, auf dem deren Grundzustandsrotationsbanden aufbauen. Jetzt wenden wir uns dem nächst-höheren Nilssonzustand $(\Omega I; \pi) = \frac{1}{2}^+$ zu. Auch für diesen können wir die Beziehung (12.2)

hinschreiben:

$$(12.6) \quad E_P^{Nil}(\frac{1}{2}+) - E_N^{Nil}(\frac{1}{2}) = (m_P - m_N)c^2 + E_C(\frac{1}{2}+)$$

Subtrahieren wir hiervon die ursprüngliche Gleichung (12.2), so erhalten wir:

$$(12.7) \quad \left[E_P^{Nil}(\frac{1}{2}+) - E_P^{Nil}(\frac{3}{2}+) \right] - \left[E_N^{Nil}(\frac{1}{2}+) - E_N^{Nil}(\frac{3}{2}+) \right] = \\ = E_C(\frac{1}{2}+) - E_C(\frac{3}{2}+).$$

Aus den experimentellen Spektren der Kerne $_{10}\text{Ne}^{21}$ und $_{11}\text{Na}^{21}$ (vgl. Abb. 16) wissen wir, wie groß jeweils der energetische Abstand zwischen der Grundzustandsbande und der darauf folgenden Bande zum Nilssonzustand $(1\Omega 1; \pi) = \frac{1}{2}+$ ist. Die Differenz dieser beiden Abstände steht in (12.7) in der ersten Zeile und ergibt sich aus den Spektren zu -356 KeV, d.h. für die Differenz der Coulombenergien erhalten wir ebenso:

$$(12.8) \quad E_C(\frac{1}{2}+) - E_C(\frac{3}{2}+) = -356 \text{ KeV.}$$

Den theoretischen Wert für $E_C(\frac{3}{2}+)$ haben wir bereits in (12.5) kennengelernt. Auf analoge Weise bekommen wir auch den zum anderen Nilssonzustand:

$$(12.9) \quad E_C^{\text{Theor}}(\frac{1}{2}+) = 4704 \text{ KeV.}$$

Mit den theoretischen Coulombenergien lautet also der zu (12.8) entsprechende Ausdruck:

$$(12.10) \quad E_C^{\text{Theor}}(\frac{1}{2}+) - E_C^{\text{Theor}}(\frac{3}{2}+) = + 22 \text{ KeV.}$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß unsere einfache Abschätzung der Coulombenergie (kugelförmiger statt sphäroidischer Rumpf) nicht die experimentellen Unterschiede der Rotationsbandenabstände im $_{10}\text{Ne}^{21}$ - bzw. $_{11}\text{Na}^{21}$ -Spektrum liefert, obwohl wir oben gesehen haben, daß die einzelnen Werte der theoretischen Coulombenergien von sinnvoller Größenordnung sind. Man könnte daran denken, daß die Rumpfdeformation deshalb nicht vernachlässigt werden darf, weil etwa das Proton in dem einen Nilssonzustand um den Äquator des Rumpfs, in dem anderen um dessen Pole läuft. Aufschluß hierüber können uns die betreffenden Nilssonfunktionen geben. Sie enthalten den Bahndrehimpuls L bzw. seine Projektion Λ auf die Rumpfachse mit folgenden Gewichten:

(a) Nilssonzustand $(|\Omega|; \pi)$ $= \frac{3}{2} +$

Zu 92%: $L = 2, \Lambda = 1$;

Zu 8%: $L = 2, \Lambda = 2$;

(b) Nilssonzustand $(|\Omega|; \pi)$ $= \frac{1}{2} +$

Zu 37%: $L = 0, \Lambda = 0$;

Zu 1%: $L = 2, \Lambda = 0$;

Zu 62%: $L = 2, \Lambda = 1$.

Der oben vermutete Extremfall ("Äquatorbahn" und "Polbahn") ist offensichtlich nicht verwirklicht. Andererseits läßt sich aus den Angaben (a) und (b) schwer folgern, inwieweit eine Berücksichtigung der Rumpfdeformation die theoretischen Coulombenergien ändern würde.

Nachdem es nicht gelungen ist, auf einfache Weise mit Hilfe der Coulombenergie die verschiedenen Rotationsbandenabstände in den experimentellen Spektren von $_{10}\text{Ne}^{21}$

und ${}_{11}\text{Na}^{21}$ zu erklären, wählen wir die übliche Methode und nehmen eine verschieden große Spin-Bahn-Wechselwirkung C für Proton und Neutron an. Zur theoretischen Beschreibung von ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ hatten wir für das Neutron den Wert

$$C_N = - 2,92 \text{ MeV}$$

gewählt. Demgegenüber nehmen wir beim Proton den Wert

$$C_P = - 2,48 \text{ MeV},$$

wobei dieser so bestimmt wurde, daß der tiefste ($\frac{3}{2}^-$)-Zustand im theoretischen wie im experimentellen ${}_{11}\text{Na}^{21}$ -Spektrum gleich hoch über dem Grundzustand liegt. Der Wert der "Goldhaberkonstanten C_0 " soll jedoch gegenüber ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ nicht verändert werden, da C_0 in einer Beziehung auftritt, die allein den Rumpf betrifft (Zusammenhang von Rumpfdeformation und von Rumpfträgheitsmoment).

Für das Hantelpotential V_R wählen wir wieder die Parameter ΔE_R und Q so, daß die Energieabstände $0^+ - 0^+$ und $0^+ - 4^+$ des theoretischen Rumpfspektrums mit dem Experiment übereinstimmen.

Wie die Abbildung 17 zeigt, erhalten wir dann bis zu 4 MeV Anregungsenergie gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Aber wie schon bei ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ ist der Energieabstand ($\frac{3}{2}^+ \rightarrow \frac{5}{2}^+$) in der Grundzustandsbande zu groß und kann nur durch Übergang zu einer weicheren Hantel dem Experiment besser angepaßt werden. Alle in diesem Zusammenhang auftretenden Überlegungen und Ergebnisse sind den schon bei ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ durchgeführten völlig analog und sollen deshalb hier nicht mehr wiederholt werden.

Schließlich sei noch erwähnt, daß bis jetzt auch zum Kern ${}_{11}\text{Na}^{21}$ noch keine Modellrechnungen in der Literatur veröffentlicht wurden.

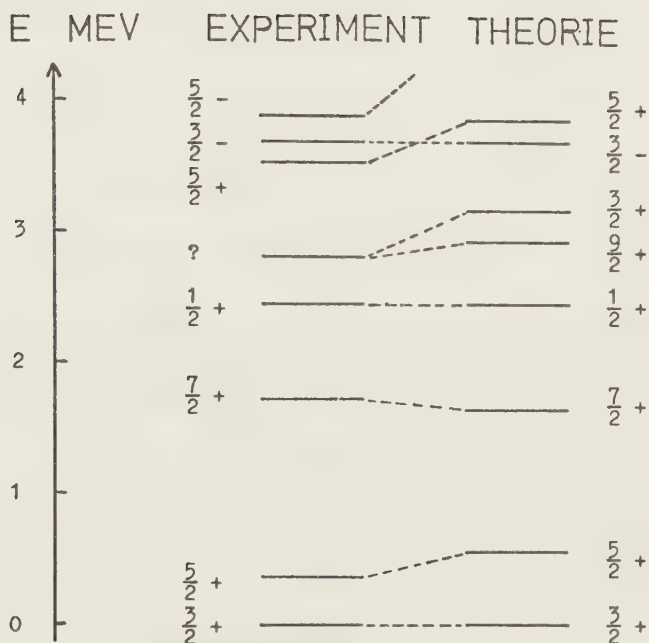


Abbildung 17:

Experimentelles und theoretisches ${}_{11}\text{Na}^{21}$ -Spektrum;

Parameterwerte im theor. Spektrum:

$C_0 = 6,5 \cdot 10^2 \text{ fm}^2 \text{ KeV}^{1/2}$; $C = -248 \text{ MeV}$;

XIII. Die Anwendung des Modells auf den Kern ${}_{11}\text{Na}^{22}$

Nachdem das Modell "schwingender Rumpf mit einem Außennukleon" bei ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ und ${}_{11}\text{Na}^{21}$ eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment ergab, versehen wir nun - als Ergänzung - den ${}_{10}\text{Ne}^{20}$ -Rumpf mit zwei Außennukleonen (einem Proton und einem Neutron) und übernehmen sämtliche Parameterwerte (Rumpfparameter; Spin-Bahn-Wechselwirkung für Proton und Neutron) von ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ und ${}_{11}\text{Na}^{21}$. Wir erhalten dann ein theoretisches Spektrum für den Kern ${}_{11}\text{Na}^{22}$ bei fehlender Proton-Neutron-Restwechselwirkung.

Die Diskussion des zugehörigen Modellhamiltonoperators H_{uu} (vgl.(4.21)) und des Ansatzes für seine Eigenfunktionen (vgl.(7.28)) wurde bereits in vorangegangenen Kapiteln erledigt. Der Übergang vom starren zum weichen Rumpf bewirkt wie beim ug-Kern-Modell ein variables Rumpfträgheitsmoment und ein Mitschwingen der Nilssonpotentiale. Beide Effekte führen zu einer Kopplung von Zuständen verschiedener Schwingungsquantenzahlen n_R ; die Diskussion der entsprechenden Matrixelemente wurde beim ug-Kern-Modell durchgeführt (vgl. Kap.X) und führt beim uu-Kern-Modell zu analogen Ausdrücken und Schlußfolgerungen.

Stellen wir nun die Frage, welches theoretische ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum bei fehlender Restwechselwirkung zu erwarten sei und gehen dabei zunächst von einem starren Rumpf aus. Es ist bekannt, daß ein uu-Kern-Modell, bestehend aus einem starren axialsymmetrischen Rumpf und zwei Außennukleonen, in erster Näherung zu jedem Paar

von Nilssonzuständen (Ω_P, N_P, w_P) und (Ω_N, N_N, w_N)
zwei Rotationsbanden

$$J = |K|, |K|+1, |K|+2, \dots$$

$$\text{mit } |K| = |\Omega_P| + |\Omega_N| \quad \text{oder} \quad |K| = ||\Omega_P| - |\Omega_N||$$

liefert [3]. Wie wir weiterhin aus Kapitel XI bzw. XII wissen, gehören die energetisch tiefsten Nilssonzustände, die bei ${}_{10}\text{Ne}^{21}$ und ${}_{11}\text{Na}^{21}$ von den Außennukleonen besetzt werden können, zu den Quantenzahlen

$$(|\Omega_P|, \pi) = \frac{3}{2}^+; \quad (|\Omega_N|, \pi) = \frac{3}{2}^+.$$

Wir erwarten also, daß das theoretische ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum mit Zuständen positiver Parität beginnt, die zu zwei Rotationsbanden mit $|K|=0$ bzw. $|K|=3$ gehören:

$$(J, \pi) = 0^+, 1^+, 2^+, \dots \quad \text{und} \quad (J, \pi) = 3^+, 4^+, 5^+.$$

Bei Berücksichtigung sämtlicher Terme des uu-Kern-Hamiltonoperators werden diese beiden Banden jedoch keine exakte $J(J+1)$ -Struktur aufweisen. Durch die Operatoren J_+j_{P-} , J_-j_{P+} , J_+j_{N-} , J_-j_{N+} , $j_{N+}j_{P-}$ und $j_{N-}j_{P+}$ werden schon bei starrem Rumpf Zustände verschiedener $|K|$ -Banden mit

$$|K'| = |K|$$

$$|K'| = |K| + 1$$

$$|K'| = ||K| - 1|$$

gekoppelt (sog. "Rotationsbandenmischung"). Außerdem

ergeben sich bei weichem Rumpf darüberhinaus noch Matrixelemente zwischen Zuständen zu verschiedenen Schwingungsquantenzahlen n_R .

Die Abbildung 18 zeigt das zugehörige theoretische $_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum und zum Vergleich das experimentelle Spektrum. Beide Spektren beginnen mit den oben vorausgesagten Banden. Ansonsten ist zwischen Theorie und Experiment aber noch eine große Diskrepanz festzustellen, obwohl die hier verwendeten Parameter sich bei den Nachbarkernen gut bewährten.

Hieraus können verschiedene Konsequenzen gezogen werden. Wir können annehmen, daß sich der Rumpf bei Anwesenheit zweier Außennukleonen so stark verändert hat (sog. "Rumpfpolarisation"), daß wir die Rumpfparameter nicht mehr wie bisher an das experimentelle $_{10}\text{Ne}^{20}$ -Spektrum, sondern an das experimentelle $_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum anpassen müssen. Andererseits kann man dann fragen, warum dieses Verfahren nicht schon bei Anwesenheit von nur einem Außennukleon nötig war.

Die andere Möglichkeit besteht in der Einführung einer geeigneten Proton-Neutron-Restwechselwirkung V_{PN} . Als einfacher Ansatz für V_{PN} wurde bereits in Kapitel III der Ausdruck (vgl.(3.4)) angegeben:

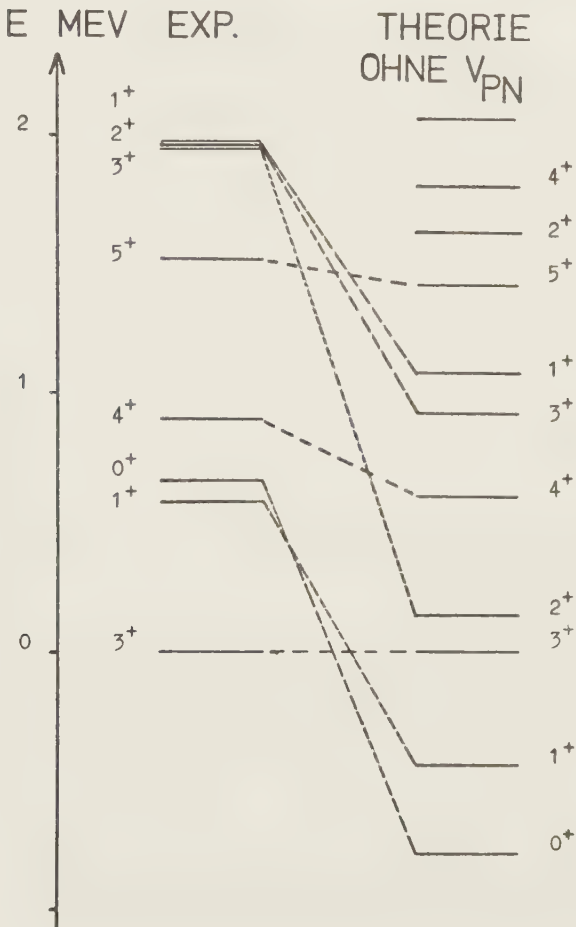
(13.1)

$$V_{PN} = \frac{V_1}{\lambda^3} \delta(\vec{s}_P - \vec{s}_N) + \frac{V_2}{\lambda^3 A^2} \delta(\vec{s}_P - \vec{s}_N) \vec{s}_N \cdot \vec{s}_P$$

$$\text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{m\bar{\omega}}{\hbar}}$$

(m =Nukleonenmasse; $\bar{\omega}$ =mittlere Oszillatorfrequenz in den Nilssonpotentialen)

Abbildung 18: Experimentelles ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum und
theoretisches ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum ohne V_{PN}



Diese Restwechselwirkung V_{PN} wurde schon von De Shalit [5] benutzt, um im Falle sphärischer Einteilchenpotentiale die sog. "Nordheim-Regeln" für uu-Kerne zu erklären.

Wir berechnen den Einfluß dieser Restwechselwirkung auf das ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum in Störungsrechnung bis zu zweiter Ordnung. Die Wellenfunktionen des ungestörten Problems sind also durch Diagonalisierung des uu-Kern-Hamiltonoperators für $V_{PN}=0$ zu ermitteln und lassen sich als Linearkombinationen der ursprünglichen Entwicklungsfunktionen (vgl.(7.28))

$$Q_{n_R}(\zeta_n) \frac{\sqrt{2J+1}}{4\pi} \left[D_{M;K}^{J*} |N_P; \Omega_P; w_P\rangle |N_N; \Omega_N; w_N\rangle + \right. \\ \left. + (-1)^{J+1+N_P+N_N} D_{M;-K}^{J*} |N_P; -\Omega_P; w_P\rangle |N_N; -\Omega_N; w_N\rangle \right]$$

$$(K=\Omega_P+\Omega_N; |N; \Omega; w\rangle = \text{Nilssonfunktion})$$

schreiben.

Als Ergebnis der Störungsrechnung stellen wir fest, daß beim Einschalten der reinen δ -Kraft

$$(13.2) \quad \frac{V_1}{\lambda^3} \delta(\vec{s}_P - \vec{s}_N)$$

sich die Niveaureihenfolge im ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum nur unbedeutend verändern läßt. Dagegen bringt der zweite Spinabhängige Term

$$(13.3) \quad \frac{V_2}{\lambda^3 \hbar^2} \delta(\vec{s}_P - \vec{s}_N) \vec{s}_N \cdot \vec{s}_P$$

die in Abbildung 19 skizzierten Energieverschiebungen mit sich. Hier zeigt sich, daß die Energien der Bande

$$(J, \pi) = 3^+, 4^+, 5^+$$

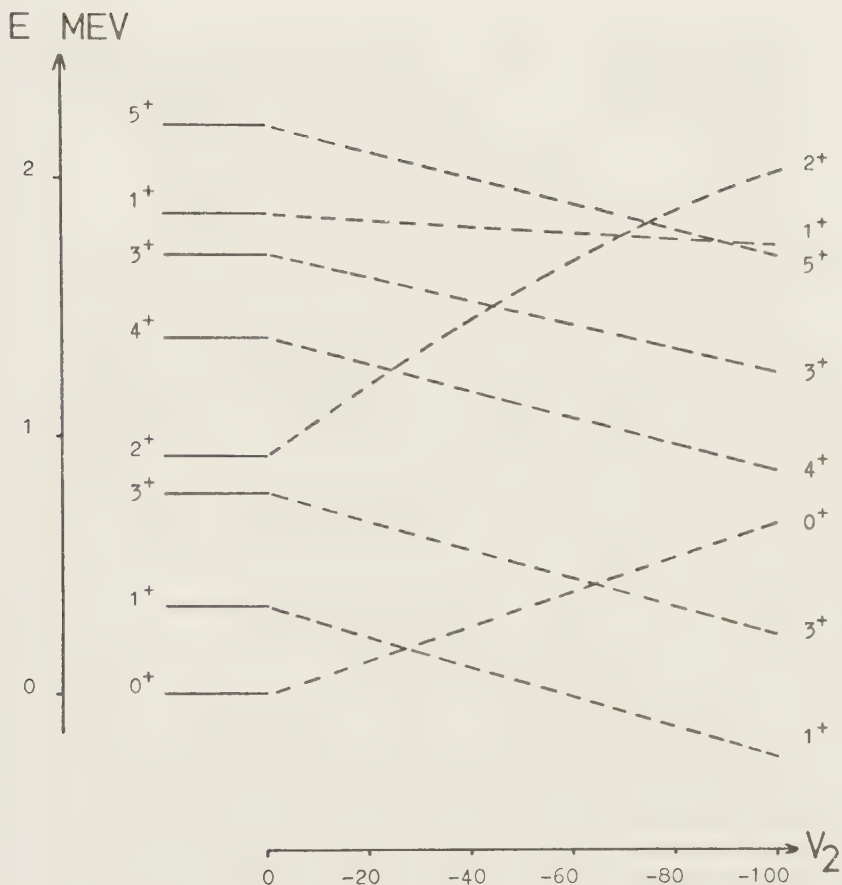


Abbildung 19

Der Einfluß der Restwechselwirkung $\frac{V_2}{\lambda^3 A^2} \delta(\vec{s}_P - \vec{s}_N) \vec{s}_N \vec{s}_P$ auf das theoretische ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum; V_2 ist in MeV angegeben.

gemeinsam abgesenkt werden. In der 0^+ -Bande dagegen werden die Energien der Zustände zu geraden Drehimpulsen angehoben, die zu ungeraden Drehimpulsen vermindert (sog. "Odd-Even-Shift").

Um diese Verschiebungen zu verstehen, müßten wir eigentlich die Matrixelemente der Restwechselwirkung - gebildet mit den Wellenfunktionen des ungestörten Problems - diskutieren. Diese ungestörten Wellenfunktionen enthalten aber jeweils eine der oben angegebenen Entwicklungsfunktionen (7.28) mit überwiegenden Gewicht. Für ein grobes Verständnis des Ergebnisses aus Abbildung 19 betrachten wir deshalb hier nur die mit den Entwicklungsfunktionen (7.28) gebildeten Matrixelemente von V_{PN} .

Für vorgegebene Werte $N_P = N_N = 2$ der beiden Oszillatorhauptquantenzahlen haben die zugehörigen Matrixelemente von (13.3) - abgekürzt geschrieben - die Form:

$$(13.4) \quad \delta_{n_R'; n_R} \left[\delta_{K'; K} f(\Omega_{P'}; \Omega_{N'}; \Omega_P; \Omega_N) + \right. \\ \left. + (-1)^{J+1} \delta_{K'; -K} f(\Omega_{P'}; \Omega_{N'}; -\Omega_P; -\Omega_N) \right].$$

Da die Wechselwirkung (13.3) nicht von der Rumpfvariablen g_R abhängt, verschwinden - wie (13.4) zeigt - ihre Matrixelemente für Zustände verschiedener Schwingungsquantenzahlen n_R . Außerdem sehen wir, daß die Matrixelemente für Zustände einer $|K|$ -Bande zu $|K| \neq 0$ nicht vom Drehimpuls J abhängen, da für $|K| \neq 0$ der zweite Term in der eckigen Klammer von (13.4) Null ist. Damit erklärt sich in Abbildung 19, daß die Mitglieder der ($|K| = 3$)-Bande

$$(J, \pi) = 3^+, 4^+, 5^+, \dots$$

gemeinsam abgesenkt werden.

Andererseits kann für $|K| = 0$ der zweite Term in der eckigen Klammer von (13.4) ungleich Null sein und liefert

dann für gerade J-Werte einen Beitrag mit umgekehrtem Vorzeichen wie für ungerade J-Werte. Das erklärt den in Abbildung 19 beobachtbaren "Odd-Even-Shift" in der $(|K|=0)$ -Bande

$$(J, \pi) = 0^+, 1^+, 2^+, \dots$$

Insgesamt erkennt man aus Abbildung 19, daß die Restwechselwirkung (13.3) teilweise die richtige Tendenz zur Verschiebung der theoretischen ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Niveaus liefert, daß jedoch die ungeraden Drehimpulse der $(|K|=0)$ -Bande energetisch zu stark abgesenkt werden.

Eine Verbesserung ist möglich, wenn anstelle der δ -Funktion in V_{PN} eine Gaußfunktion verwendet wird:

$$V_{\text{PN}} = \frac{V_0}{\hbar^2} \vec{S}_N \cdot \vec{S}_P e^{-\tilde{B}(\vec{S}_P - \vec{S}_N)^2}.$$

Hier gibt der Parameter V_0 die Stärke der Restwechselwirkung an und der Parameter $\tilde{B}$ bestimmt ihre mittlere Reichweite. Die Matrixelemente dieser Wechselwirkung wurden von M.Reinecke [34] berechnet und programmiert. Sie hängen in gleicher Weise von J und K ab wie bei Verwendung der δ -artigen Ortsfunktion, sodaß auch hier wieder "Odd-Even-Shift" auftritt.

Im folgenden ist $\tilde{B}$ so gewählt, daß die

$$\text{mittlere Reichweite} = 2\text{fm}$$

beträgt und es ist V_{PN} in Störungsrechnung 1.Ordnung berücksichtigt. Die zugehörigen Energieverschiebungen sind in Abbildung 20 in Abhängigkeit von V_0 aufgetragen.

Wir sehen, daß im niederenergetischen Bereich von 0-2MeV mit einer Stärke $V_0 = -160\text{MeV}$ der Restwechsel-

Abbildung 20:

Der Einfluß der Restwechselwirkung $V_{PN} = V_0 e^{-B(\vec{s}_P - \vec{s}_N)^2} \vec{s}_P \vec{s}_N$ auf das theoretische ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum (Reichweite 2fm, Stärke der Wechselwirkung V_0 in MeV). Zum Vergleich ist außerdem das experimentelle ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum angegeben.

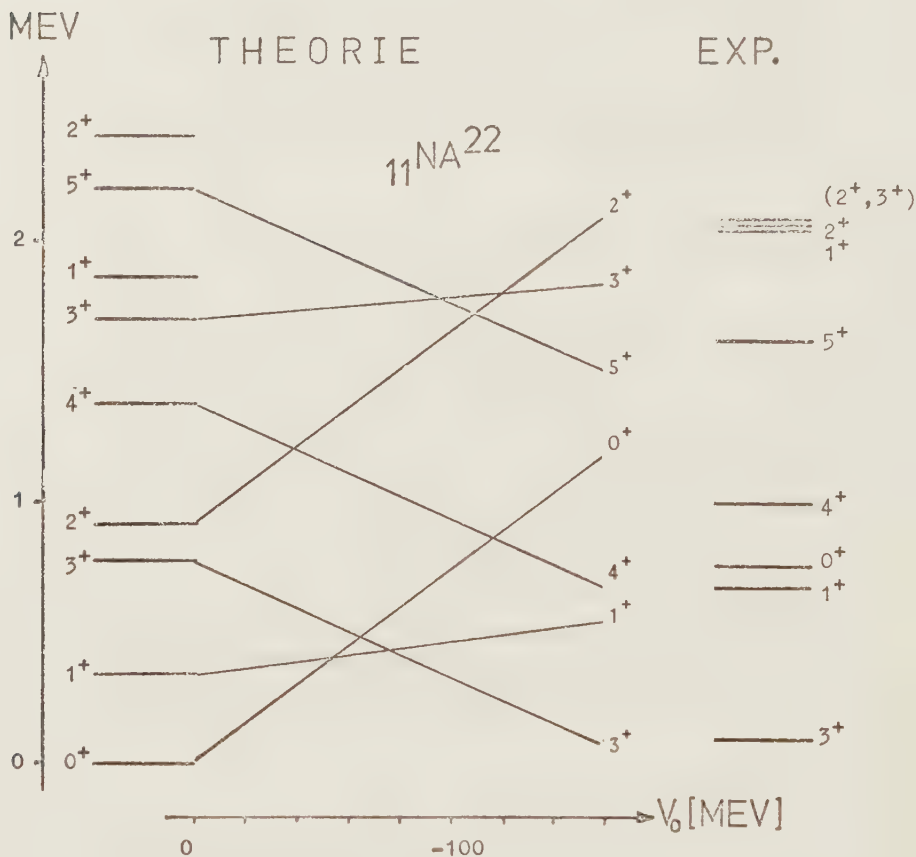
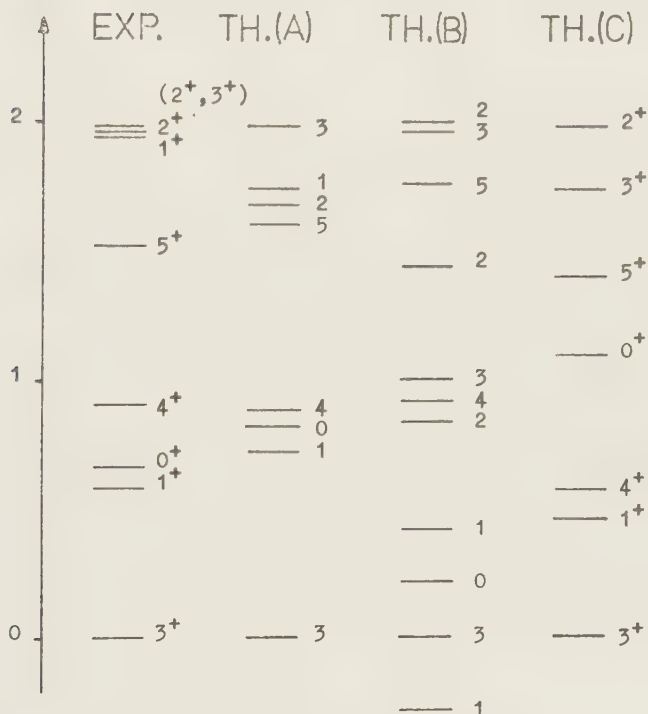


Abbildung 21

Das experimentelle ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum und 3 theoretische ${}_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektren (A,B,C)

- (A) uu-Kern-Modell mit starrem Rumpf von P. Wasielewski u. F.B. Malik [31];
 (B) Schalenmodell von E.C. Halbert [32];
 (C) das vorliegende uu-Kern-Modell mit schwingendem Rumpf mit $V_0 = -160\text{MeV}$

MEV



wirkung die experimentellen Energieabstände in den Banden

$$(J, \pi) = 3^+, 4^+, 5^+, \dots \quad \text{und} \quad 0^+, 1^+, 2^+, \dots$$

einigermaßen gut wiedergegeben werden. Mit dem Parameterwert $V_0 = -160 \text{ MeV}$ liegen die Matrixelemente der "Störung" V_{PN} im Bereich $0-1,2 \text{ MeV}$ und sind damit größenordnungsmäßig etwa 1% von den Diagonalelementen des ungestörten uu-Kern-Hamiltonoperators. Entsprechende Verhältnisse finden wir beispielsweise auch bei Davidson [3] .

Das vorliegende theoretische $_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum zum oben genannten Parameterwert von V_0 ist in Abbildung 21 nochmals unter (C) eingezeichnet und kann dort mit weiteren theoretischen Spektren (B) und (A) aus der Literatur verglichen werden. Dabei ist das Spektrum (B) das Ergebnis einer Schalenmodellrechnung von E.C. H A L B E R T [32] und zeigt wenig Ähnlichkeit mit dem experimentellen $_{11}\text{Na}^{22}$ -Spektrum. Das andere unter (A) skizzierte theoretische Spektrum wurde von P. W A S I E L E W S K I und von F.B. M A L I K [31] aus einem uu-Kern-Modell mit starrem Rumpf gewonnen. Es stimmt recht gut mit dem Experiment überein. Dies konnte aber nur mit einer größeren Zahl freier Parameter erreicht werden. Insbesondere wurde von einer recht fragwürdigen Methode Gebrauch gemacht, indem zunächst die Matrixelemente eines vorgegebenen Hamiltonoperators H_{uu} berechnet wurden und dann an einige von diesen noch nachträglich ein freier Parameter angefügt wurde.

Zusammenfassung

Das in dieser Arbeit diskutierte ug- bzw. uu-Kern-Modell beschreibt den gg-Rumpf als schwingende Hantel, die aus zwei spinlosen Teilchen gleicher Masse im Abstand g_R besteht. Ein von g_R abhängiges Potential $V_R(g_R) = A/g_R^2 + Bg_R^2$ bewirkt, daß die beiden Hantelmassen um einen Gleichgewichtsabstand schwingen, wobei das mittlere Hantelträgheitsmoment mit dem Hanteldrehimpuls zunimmt (Zentrifugalstreckung). Dieses Hantelmodell kann einen positiv deformierten gg-Rumpf beschreiben, der (axialsymm.) B-Schwingungen ausführt und dessen Spektrum aus "Rotationsbanden" $(J, \pi) = 0^+, 2^+, 4^+ \dots$ zu verschiedenen Schwingungsquantenzahlen $n_R = 0, 1, 2, \dots$ besteht. Das Hantelmodell sieht jedoch nicht das Aufbrechen von Nukleonenpaaren im Rumpf vor, sodaß seine Anwendung nur für Anregungen unterhalb der Paarungsenergie sinnvoll ist. Innerhalb dieses niederenergetischen Bereichs (0-3 MeV) läßt sich durch geeignete Wahl des Hantelpotentials V_R (d.h. von A und B) erreichen, daß das mittlere Trägheitsmoment der Hantel gleich dem eines vorgegebenen gg-Kerns ist und daß auch die Zentrifugalstreckung einigermaßen richtig wiedergegeben wird. Diese Zentrifugalstreckung tritt vor allem bei leichten deformierten Kernen ($20 \leq A \leq 30$) auf. Hier ist der gg-Kern ${}_{10}\text{Ne}^{20}$ für das Hantelmodell besonders gut geeignet, da er relativ weich ist und da sein Spektrum keine tiefliegenden δ -Schwingungsbanden enthält.

Eine Erweiterung des Hantelmodells auf gu-, ug- und uu-Kerne wurde dadurch erreicht, daß die Außennukleonen in ein Nilssonpotential gesetzt wurden, das die Hantelachse

als Symmetrieachse besitzt und dessen Deformation β als Funktion der Hantellänge g_R um einen Mittelwert schwingt. Die Funktion $\beta(g_R)$ wurde gewonnen, indem von einem empirischen Zusammenhang zwischen dem Trägheitsmoment und der Deformation schwerer gg -Kerne ausgegangen wurde (Scharff-Goldhaber) und diese Beziehung auf leichte Kerne mit $20 \leq A \leq 30$ erweitert wurde. Bei der Anwendung des Modells auf die Kerne $_{10}\text{Ne}^{21}$ und $_{11}\text{Na}^{21}$ war damit nur noch die Stärke C der Spin-Bahn-Wechselwirkung festzulegen. Indem C (in Übereinstimmung mit der Literatur) bei beiden Kernen passend gewählt wurde, konnte im Bereich 0-4 MeV jeweils gute Übereinstimmung mit den experimentellen Spektren erzielt werden. Diese Übereinstimmung ist besonders deshalb erfreulich, weil eine solch kleine Parameterzahl ausreichte, um die energetische Lage von Zuständen zu erklären, die bei jedem der beiden Kerne zu 4 verschiedenen Rotationsbänden und darüberhinaus zu 2 Oszillatorschalen im Nilssonmodell gehören. Außerdem wurde noch bei $_{10}\text{Ne}^{21}$ gezeigt, daß die "Weichheit" des gg -Rumpfes so deutlich in das ug -Kern-Spektrum eingeht, daß ein Modell mit "weichem Rumpf" jedenfalls sinnvoll ist.

Bei der Anwendung des Modells auf den uu -Kern $_{11}\text{Na}^{22}$ wurde mit einer Proton-Neutron-Restwechselwirkung der Form

$$V_{PN} = \frac{V_0}{2} \vec{S}_P \cdot \vec{S}_N f(|\vec{S}_P - \vec{S}_N|)$$

gerechnet. Dabei ergab eine δ -artige Ortsfunktion f eine wesentlich schlechtere Wiedergabe des experimentellen Spektrums als eine Gaußfunktion mit vernünftiger Reichweite.

L i t e r a t u r h i n w e i s e

=====

- 1 A.Fässler u. W.Greiner, Z.f.Physik 168,
S.425, [1962]
- 2 A.Fässler, Nucl.Physics 59, S.177, [1964]
- 3 R.J.Ascuitto,D.A.Bell,J.P.Davidson,
Phys.Rev.176, S.1323, [1968]
- 4 S.G.Nilsson,Kgl.Danske Videnskab.Selskab,
Mat.Fys.Medd.29, S.16, [1955]
- 5 De Shalit,Phys.Rev.91,S.1479, [1953]
- 6 W.Büttner u. H.Ruder,Z.Naturforsch.24a,
S.1163, [1969]
- 7 H.Näpfel,H.Ruder u. H.Volz,Z.Naturforsch.23a,
S.199, [1968]
- 8 M.E.Rose,Elementary Theory of Angular Momentum,
Wiley,New York, [1966]
- 9 G.Rakavy,Nucl.Physics 4,S.375, [1957]
- 10 Davidov u. Filippov,Nucl.Physics 8,S.237, [1958]
- 11 J.A.Kuehner u. E.Almqvist,Can.J.Phys.45,Nr.5,
S.1605, [1967]

- 12 L.Grodzins, Phys.Letters 2, Nr.2, S.88, [1962]
- 13 M.A.J.Mariscotti, G.Scharff-Goldhaber, B.Buck, Phys.Rev.178, Nr.4, S.1864, [1968]
- 14 Y.P.Varshni, S.Bose, Phys.Rev.C, Band 3, Nr.2, S.958, [1970]
- 15 Y.Horikawa, Phys.Letters 36B, Nr.1, S.9, [1971]
- 16 Y.Horikawa, Progress of Theor. Phys., Band 47, Nr.3, S.867, [1972]
- 17 K.Nakai, F.S.Stephens, R.M.Diamond, Nucl.Phys. A150, 1, S.114 [1970]
- 18 Franklin D.Sydner, Phys.Rev.C6, Band 1, S.204 [1972]
- 19 E.K.Warburton, A.R.Poletti, J.W.Olness, Phys.Rev.168, Band 4, S.1232 [1967]
- 20 V.M.Khvastunov et al., Sov.J.of Nucl.Phys.12, Band 1, S.5, [1970]
- 21 Kurath, Phys.Rev.C5, Band 3, S.768, [1972]
- 22 Lieb, Grawe, Röpke, Nucl.Phys.A98, S.145, [1967]
- 23 M.Berg, A.Hofmann, K.Thomas, Phys.Inst.d.Univ. Erlangen-Nürnberg, [1972]
- 24 S.Hinds, R.Middleton, Nucl.Phys.84, S.651, [1966]

- 25 W.Magnus, F.Oberhettinger, Formeln u. Sätze
für die spez. Funktionen der math. Physik,
Springer-Verlag, Berlin [1943]
- 26 A.J.Howard, J.P.Allen, D.A.Bromley, Phys.Rev.139,
Nr.5B, S.1135 [1965]
- 27 A.J.Howard, J.G.Pronko, C.A.Whitten, Phys.Rev.184,
Nr.4, S.1094 [1969]
- 28 R.Bloch, T.Knellwolf, R.E.Pixley, Nucl.Phys.A 123,
S.129 [1968]
- 29 A.M.Baxter, B.W.J.Gillespie u. J.A.Kuehner,
Can.J.of Phys., 48, S.2434 [1970]
- 30 H.Ruder, mündliche Mitteilung
- 31 P.Wasielewski u. F.B.Malik, Nucl.Phys.A 160, S.113
[1970]
- 32 E.C.Halbert, Third Symp. on the structure of low-
medium mass nuclei, ed.J.P.Davidson (Univ. of Kansas
Press, Lawrence, 1968)
- 33 P.M.Endt u. C.Van der Leun, Nucl.Phys.A105,
S.7 [1967]
- 34 M.Reinecke, Dissertation, Erlangen [1973]

Herrn Prof. Dr. H.Volz danke ich für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit und für viele fruchtbare Anregungen.

Dank schulde ich weiterhin Herrn Privatdozent Dr. H.Ruder für nützliche Gespräche sowie Herrn Diplomphysiker Reinecke für die Überlassung von Programmen.

Bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft möchte ich mich außerdem für die großzügig zur Verfügung gestellte Rechenzeit bedanken.

L E B E N S L A U F

Name: Werner (Hans) Büttner

Geboren am: 7.1.1941

in: Fürth/Bay.

Eltern: Hans Büttner, Bundesbahn-
sekretär a.D.,
Luise Büttner, Hausfrau

Familienstand: ledig

Schulen: vom 1.9.1947 bis 20.7.1952
Volksschule in Fürth,
vom 1.9.1952 bis 20.7.1961
Oberrealschule in Fürth

Wehrdienst: vom 1.10.1961 bis 31.10.1962

Studium: WS 1962 bis SS 1968

Prüfungen: Diplomvorprüfung: 10.5.1965
Lehramtsvorprüfung: Herbst 1965
Diplomhauptprüfung: 19.7.1968

Stellungen: als studentische Hilfskraft
vom 16.9.1967 bis 31.7.1968,
als wissenschaftliche Hilfskraft
vom 1.10.1968 bis 31.3.1969,
als Verwalter der Dienstgeschäfte
eines wiss. Assistenten vom
1.4.1969 bis 31.3.1973, als wiss.
Hilfskraft mit Verwalterbezügen
vom 1.4.1973 bis 31.12.1973

